

「中の定理」と出会う

～シミュレーションによる証明の可能性～

1. 面白さは自分で作ってみるところから生まれる

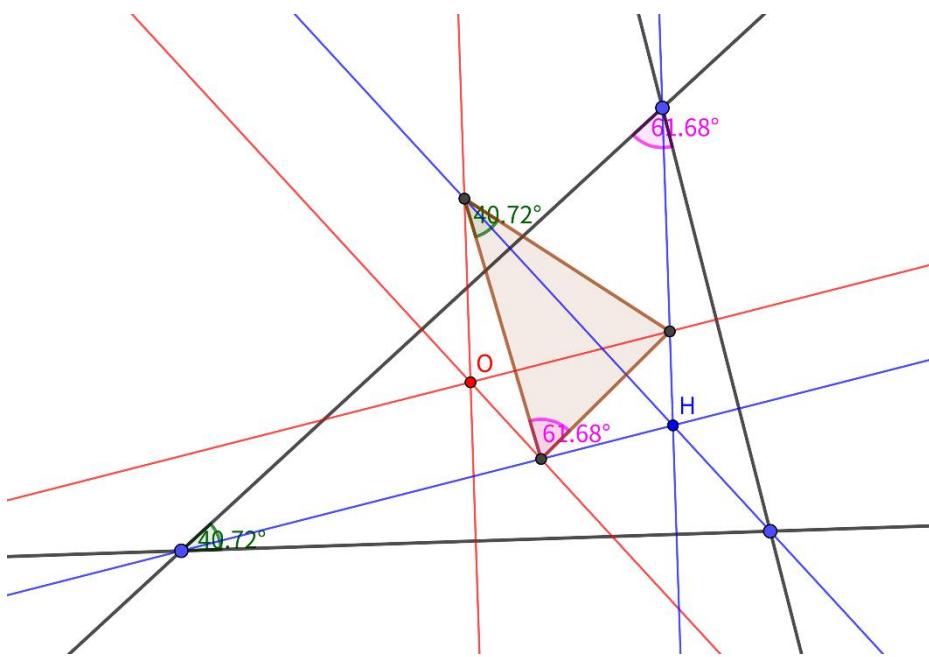
T: 三角形には外心と垂心があるね。

S: 垂直二等分線と垂線で作れるよ。

T: 「この二つの点の垂線の交点が作る三角形は元の三角形と相似である」という定理を発見した中学生がいるんだ。

S: 三角形からできる三角形のシリーズだね。→ [【三円相似と発見の道筋】](#) [【三角形からできる特別の三角形】](#)

どんな定理なの？



これすごい！ 「垂心と外心のそれぞれの垂線の交点が作る三角形は元の三角形と相似である」もう一つ相似三角形があることに気がつく。

S: 頂点をいろいろ動かしているとだんだんとわかってくる。

T: それ大事なことだね。さらに自分で作図してみるともっと感じ

ることができるよ。

S: そうか、このナビゲーションを最初に戻して自分で作ってみればいいんだね

S: 点や線を消すこともできる。・・・

S: どうして相似になるんだろう？

S: そういえば一点からの垂線って、元の三角形の角度の情報を全て持っているよ。

S: どうして？

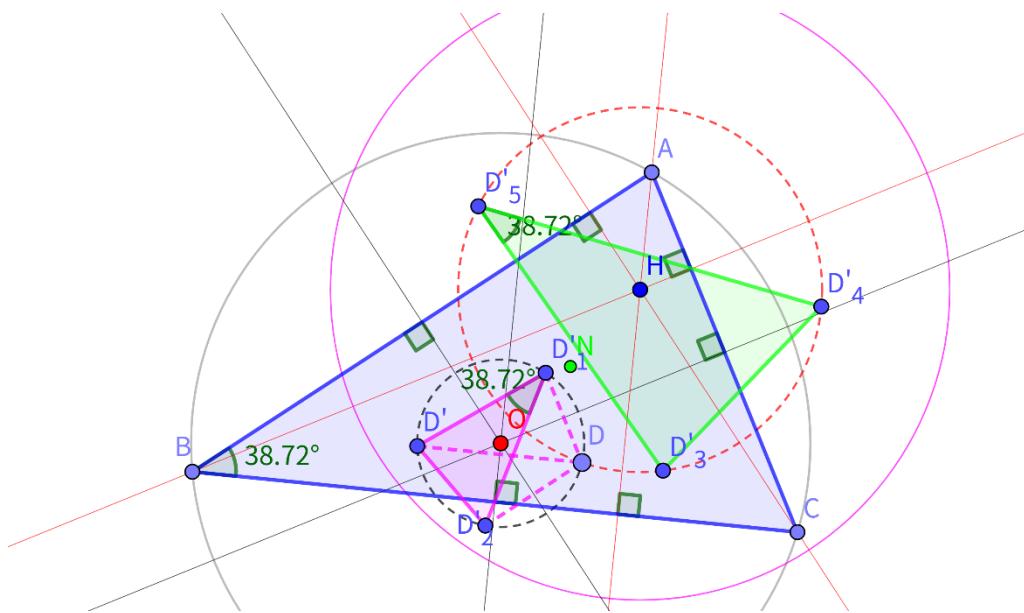
S: 垂直だから向かい合う角が同じということは、内接四角形が描ける。そうすると一点の角に各辺の角度が集まっている。

S：なるほど。

2，垂線の対称点

S：思いついたんだけど、適當な点をとてその点から各垂線への対称点をとると、元の三角形と相似になるんじゃないの？

S：確かめてみよう。



証明の手順

①まず4点が同一円周上にあることを示そう。

対称性を使えば簡単に示せる。

②元の三角形と相似であることを示そう。

同一円周上にあることから円周角の定理により簡単に示せる。

すっきりする証明だ。

S：ピッタリ予想通りだ。うれしいね。

S：どうして相似になるんだろう？

S：この4点は同一円周上にある。だからDD'はABと平行だよ。円周角の定理を使えばとてもきれいに証明できる。

S：「もしかしたら」と予想するって面白いね。

T：すぐには解けない問題に取り組むのも面白いよ。

S：苦しいんじゃないの。

T：その苦しさを乗り越えたときにより大きな喜びが待っている。例えば、その図を何度も描いてみるんだ。すると、小さな「もしかしたら」が降ってくる時がある。少しづつわかってくることって発見だろ。だから楽しい。

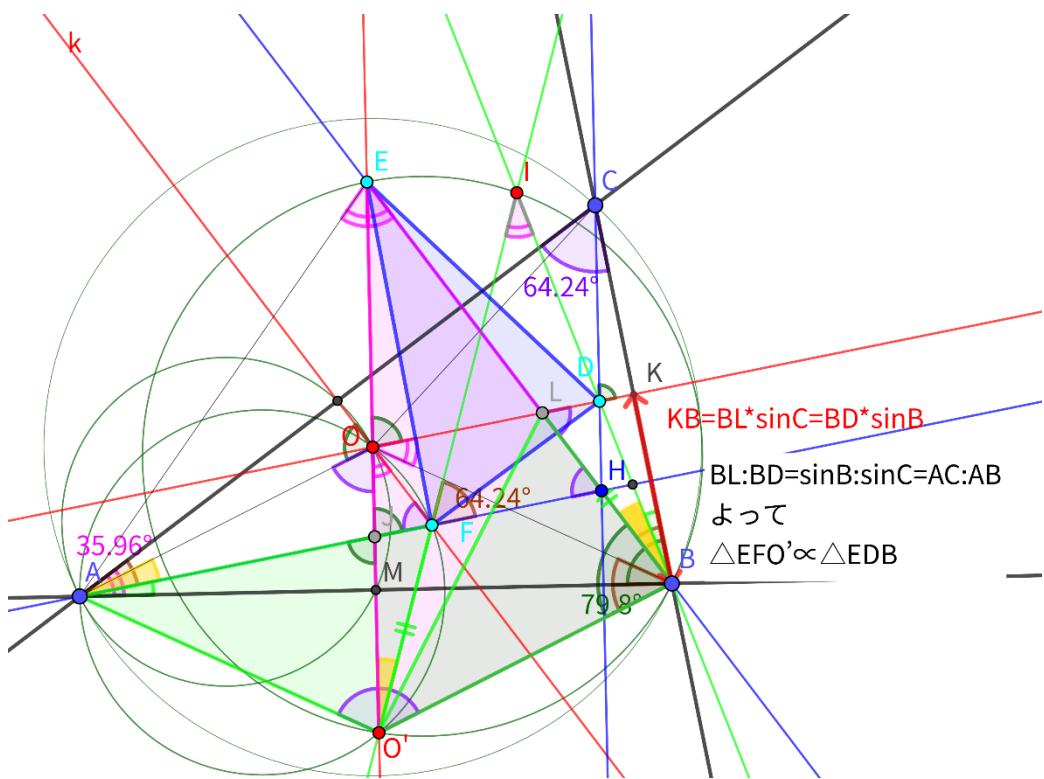
3，「中の定理」の証明

S：「中の定理」の証明も簡単かな。相似は二角がそれぞれ等しいことを言えばいいんだか

ら。

S: やってみたけどわからなかったよ。相似な三角形がいっぱい出てくるからわけがわからなくなる。

S: 三日ぐらい考えたら少しずつみえてきたよ。角度だけではだめで比を使うんだ。



証明の見通し

- ① $\triangle EFO'$ と $\triangle EDB$ が相似であれば、 $\triangle EDF$ が $\triangle ABC$ と相似であることが示せる。
- ② $\angle EO'F = \angle LBD$ を示す。
- ③ 二辺の比が等しいことを示すために、まず $\triangle AFO' \equiv \triangle O'LB$ を示す。
- ④ $EB:EO' = AB:AC$ なので LB と DB の比が

同じになれば相似。

これをどう示せばいいだろうか。

なお、 $AC\sin C = AB\sin B$ なので $\sin C:\sin B = AB:AC$

4, 「中の定理」の拡張

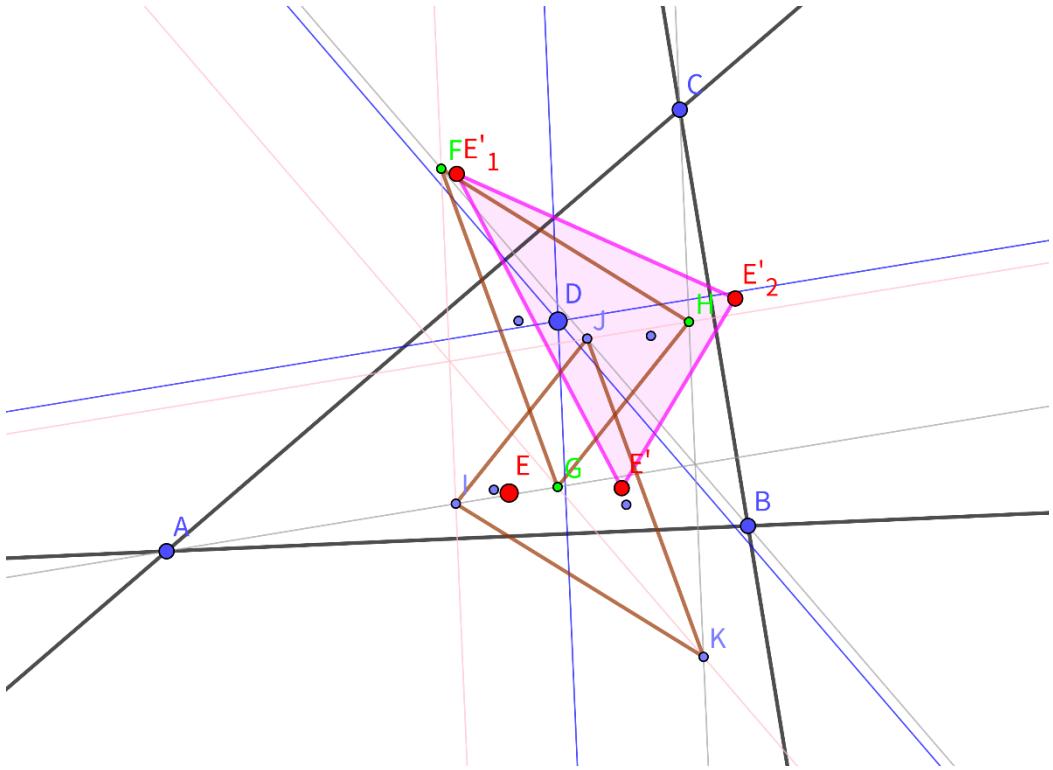
T: 今度はその拡張を考えてみよう。

S: 拡張ってこういうこと? さっき見つけたことを使うと、Dを一つの外心に置いて、Eをもう一つの垂心に置くとぴったり一致する。

S: 外心や垂心でなくても相似になるんだ。

次の図の作図の説明とその意味

- ①ある点から各辺への垂線を引く。
- ②今度はある点からその垂線への対称点で三角形を作る。
- ③するとその三角形は元の三角形と相似になる。
- ④小さな点は二つの「中三角形」の外心と垂心。



⑤Dを外心に持つていき、Eを対称な三角形の垂心に持っていくと、できた三角形はぴたりと一致する。

このアイディアと等角共役点を結びつけると次のテーマが浮かび上がる。

T：これも面白いけど中の定理では二つの垂線の交点でできる三角形でしょう。

だから、外心と垂心以外の点の垂線の交点からできる三角形を「中三角形」と名づけましょう。

S：外心と垂心の時は相似になったけど、適当な点ではダメでしょう。

S：そうだよね。ところで外心と垂心って等角共役点だったよ。

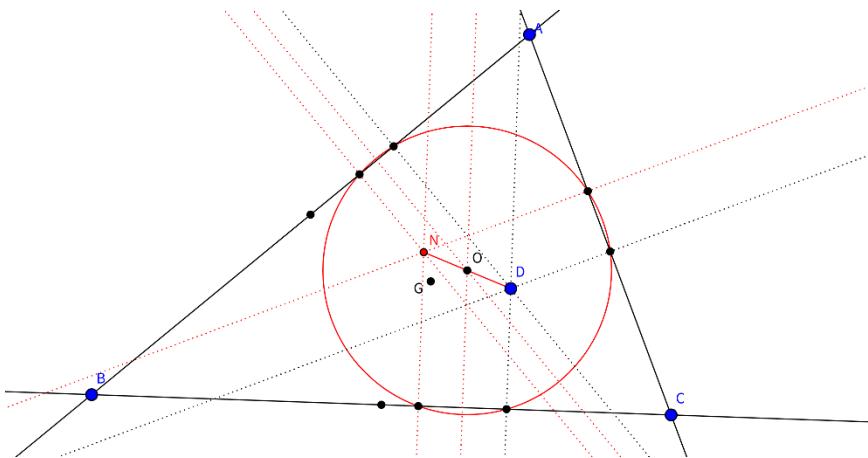
S：どういうコト？

S：辺からそれぞれの心までの角度が同じになるんだ。

S：そうか、これらは直角三角形だからもう一つが等しければ相似だよね。簡単だ。

S：ということは、自由な点をとってその等角共役点を作図してから「中三角形」を作ってみたらどうだろう。

S：ところで等角共役点の簡単な作図方法はあるの？



一点Dから各辺に垂線を下ろして、その垂足で円を作成すると辺と交わる点が出来る。

その3点から、垂線を上げると、一点で交わり、その点はDの等角共役点となる。

この円（垂足円）は、9点円の拡張になっている。

また、これを使って簡単に等角共役点が作図できる。

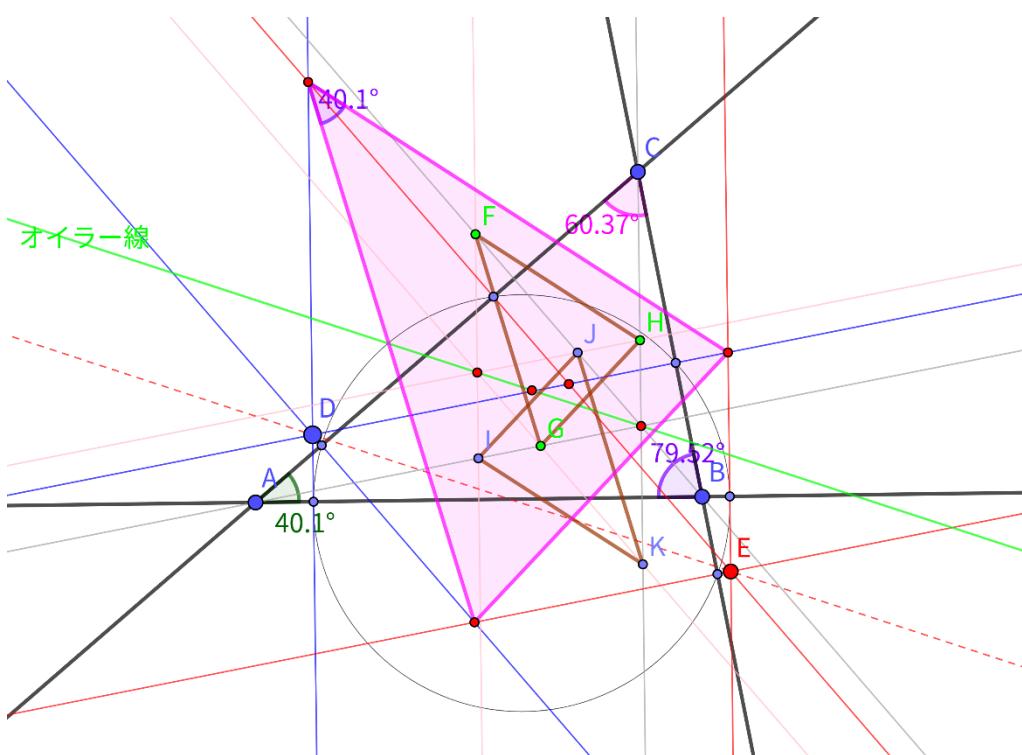
それぞれの垂線の足で三角形を作図すると、垂足三角形と中点三角形が同じモノだとわかる。

S：垂足円を作図すればいいのか。やってみよう。

・・・

S：これだといつも相似になるとは限らないな。でも相似になる時がある。どういう時に相似になるのだろう。

S：いろいろ動かして調べてみよう。外心と垂心を結んでみる。これはオイラー線だな。もしかしたら・・・。



外心と垂心は等角共役なので、等角共役点の垂線を描いて中三角形を作図。点Dをいろいろ動かしているうちに、等角共役点(DとE)を結んだ線がオイラー線と平行の時、互いの垂線の交点が作る三角形は元の三角形と相似になることに気がついた。

5，仮説「等角共役点どうしを結んだ直線が、オイラー線と平行になる場合がある。

その時、等角共役点の垂線の交点が作る三角形は、元の三角形と相似になる。」

S：まず本当にそうなるか確かめてみようよ。（下1番目の図）

S：実際に角度がぴたりと同じになるか確かめてみよう。

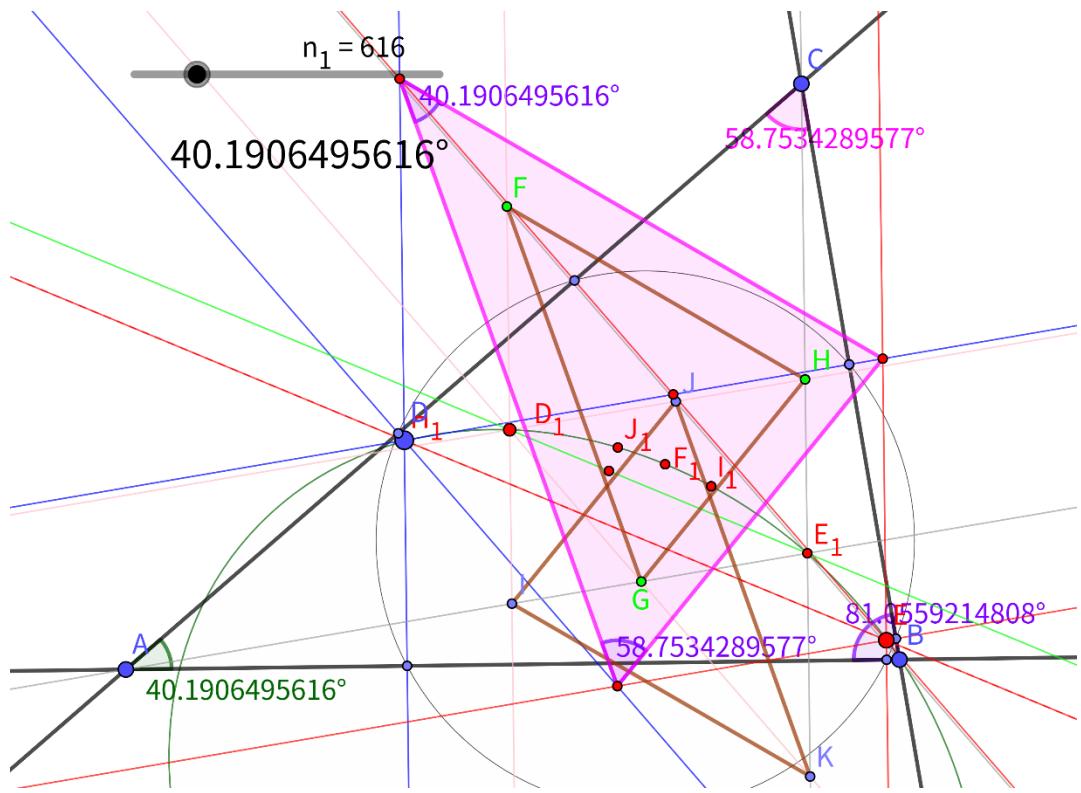
S：例えば「三角形の心」で相似になる場合がきっとあるはず。TriangleCenter(A, B, C, n_1)を使って、角度がぴったり同じ点（心）を調べる。

・・・

S：一個ずつ調べるのって大変だな。こういうのをコンピュータで自動判定させれば良いのにね。

S：等角共役点を結んだ線がオイラー線と平行になる場合は X_3 (外心) , X_4 (垂心) , X_{13} , X_{14} , X_{15} , X_{16} の時。

コツコツと3000まで調べた。ぴったり角度が合っているから間違いなく相似だよ。

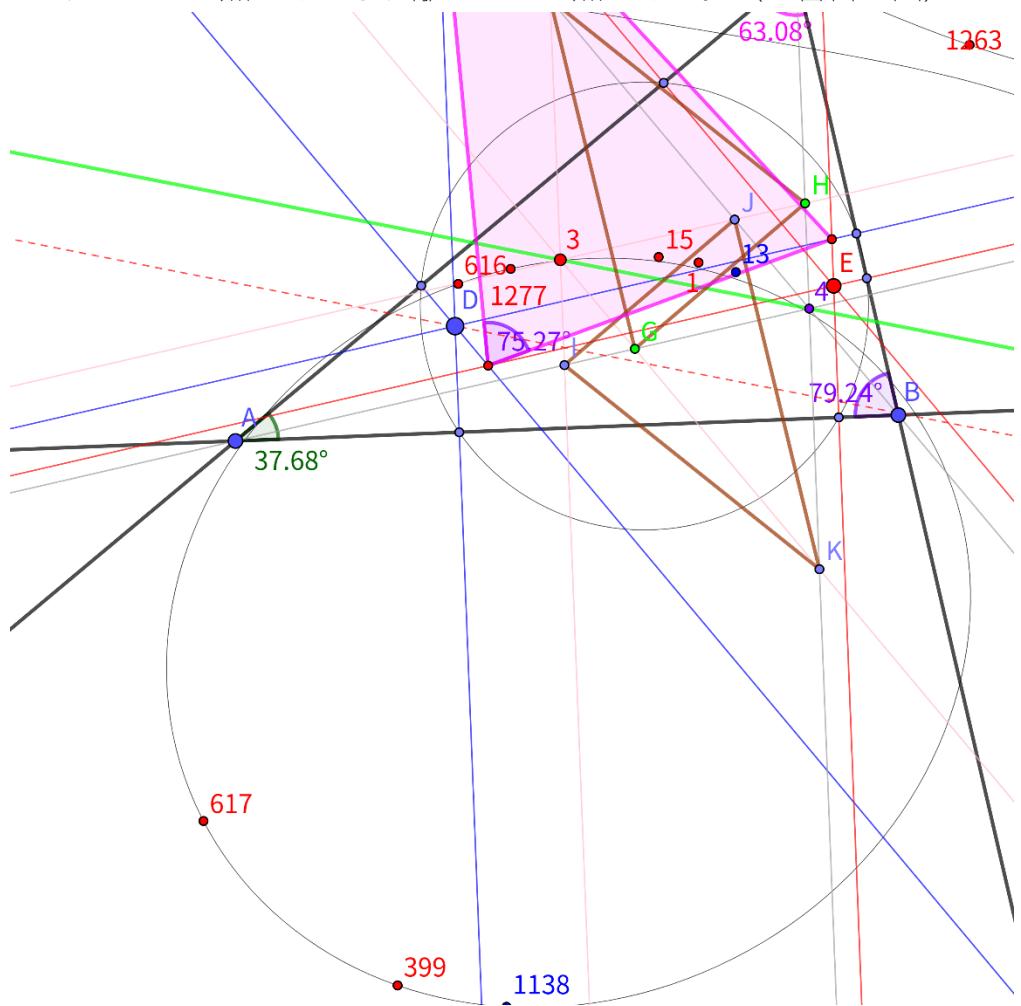


S：しかも等角
共役だからこ
れらの点はペ
アになってい
る。これを図
の中に描いて
みよう。

S：問題はこれ
らの点がどう
いう曲線を描
くかだな。

S：二次曲線か
もしかしないか
ら5点を通る
曲線を作図し
てみると・・・

S：ずれている点があるし、離れている点もある。（2番目の図）



6, 等角変形を使おう

S: 等角変形というのは何ですか？

T: 二つの等角共役点の一方を直線上に置いた時、もう一つの共役点がたどる軌跡のこと。

→ 【三角形の直角双曲線】

S: やってみよう。・・・・双曲線になったよ。（3番目の図）

S: Dを赤い点に持っていくとちゃんとオイラー線と平行になっている。しかも、まだわからない点も予測できる。

S: Dの居る直線を最初からオイラー線と平行にしてみたらどう。（4番目の図）

T: 素晴らしいアイディアだね。

S: そうすればこの等角変形の二次曲線と平行線の交点が求めたい点ということだ。（6番目の図）

S: 交点の軌跡を描けば、どんな曲線になるのかもわかるよ。

S: 本当に相似になるか二つの交点の垂線から「中三角形」を作って角度を出してみよう。

S: 15桁までピッタリだよ。

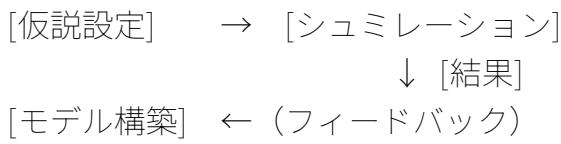
S: 間違いないね。

S: GeoGebra でこれだけのことができるんだ。

T: これも「シミュレーション学習」の良いモデルだと思う。



こう書き換えてもいいな



こうやって変化した仮説はやがてメンタルモデルとなる。

S: ところでこれって一種の証明になっているんじゃない！

S: そうだよね。

S: これを「シミュレーションによる証明」と名づけよう。コンピュータを使いながら実験のように確かめていく方法だ。面白いと思う。

T: AIによる証明ができるとすればこのような方法を経るのではないかな。

7,まとめ

このことが証明になっている理由は、理論と実験の関係と同じで、理論の正しさを実験によって証明するのが科学。具体的には次の5点。

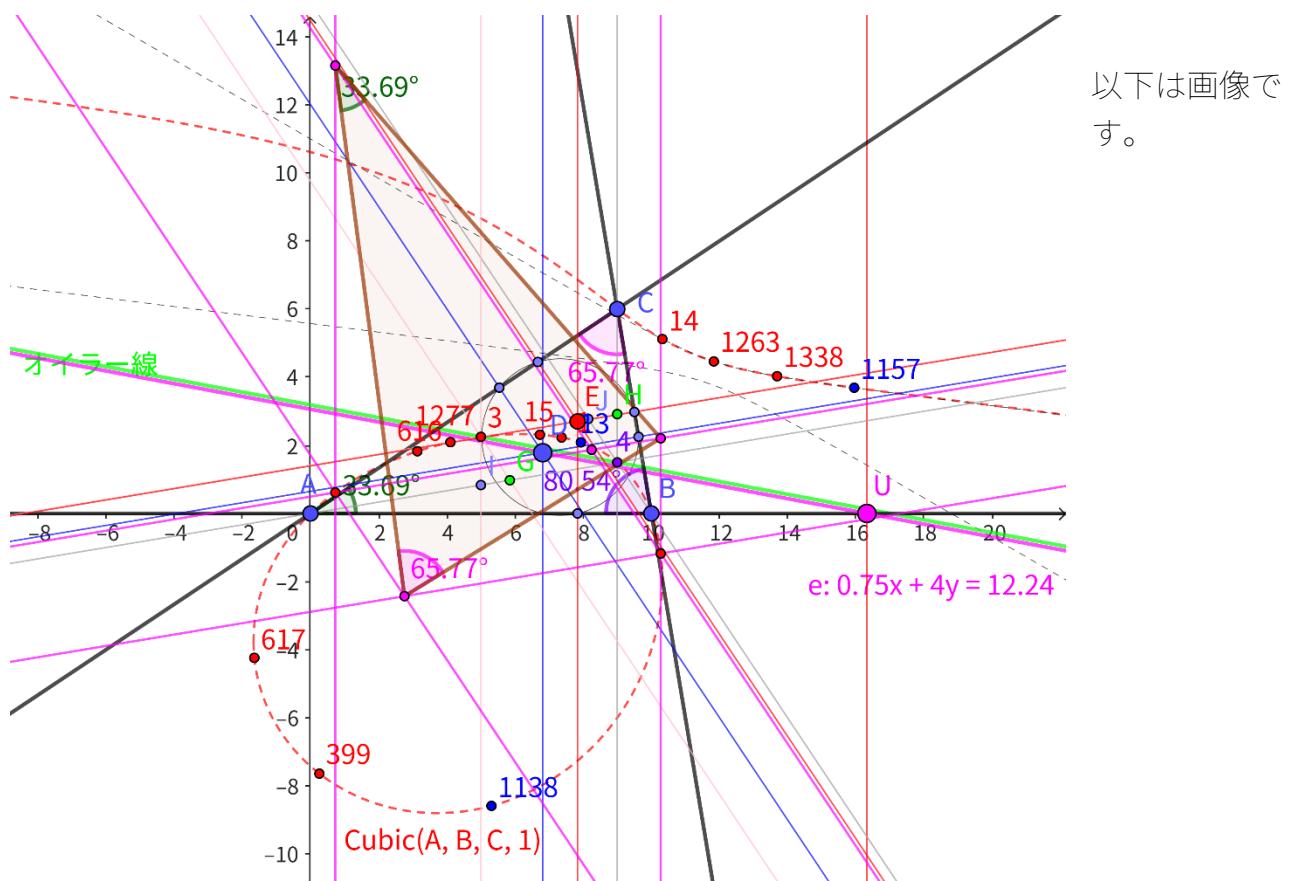
- ①GeoGebraでLocusEquationを用いると軌跡の式を求めることができる。
- ②平行線も式で求められるので、交点も求めることができることを示している。
- ③「中三角形」を作図してみると、15桁まで角度が一致している。
- ④Uの軌跡も同様に3次か4次の式で表すことができるはず。
- ⑤つまり、証明していると同じ。

S:何より実際にやってみると、間違いないと身体が感じるよ。

T:これはGeoGebraによる自動証明のようなものだと思っている。

S:ちなみに、Uが動くとき二次曲線も変化するのでこれを式で表そうとすると大変。でも、GeoGebraなら軌跡を描かせることができる。
それを観察していると、二次曲線と平行線が接する時は内心と傍心であることがわかる。

左下のアニメーションをクリックすると条件の等角共役点の軌跡が現われます。



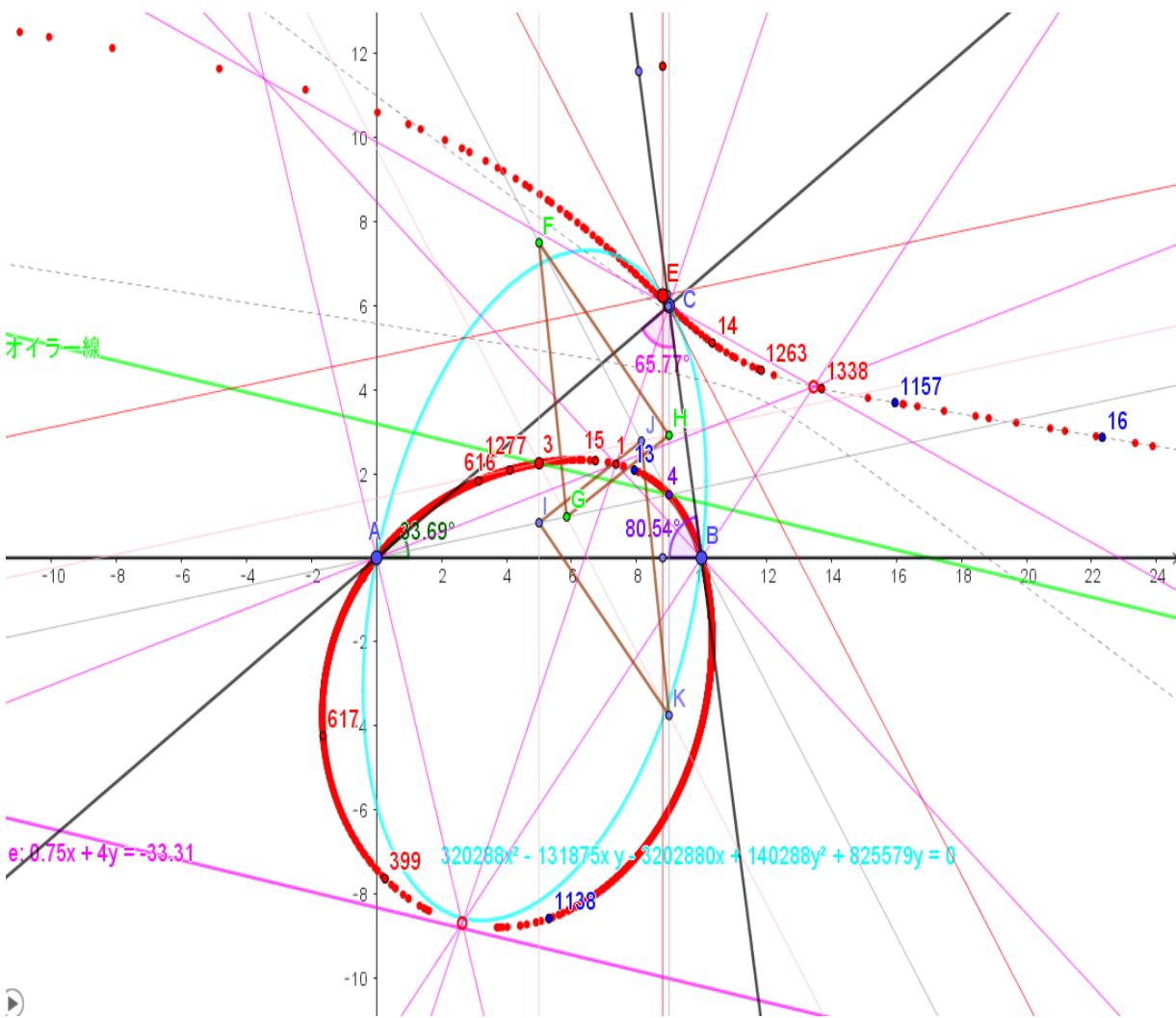
あとがき 「ノイベルグ三次曲線」だった！

これらの図は、三角形のオイラー線と平行になる等角共役点の軌跡がどんな曲線になるか描いたのですが、その正体はわからなかった。

先日、りらひいさんという方がメールでその曲線の名前を教えて下さった。

「外心と垂心の動き」の GeoGebra ブックのなかで、

等角共役点どうしを結んだ直線がオイラー線と平行になる点の軌跡を考えていきましたが、これはノイベルグ三次曲線(Neuberg cubic)というようです。



GeoGebra には三角形の三次曲線を描くコマンドがあり、

「Cubic(A,B,C,1)」とすると、3 点 A,B,C が作る三角形のノイベルグ三次曲線が一発で描けます。

Cubic Command - GeoGebra マニュアル

この Cubic コマンドを使うと、例えば

「 Cubic(A,B,C,3) 」

とすれば、ある点の三角形 ABC に関する垂足円が、三角形 ABC の九点円に接するような点の軌跡が描けます。

これを知ってびっくり。

この曲線がすでに研究されていたとは思わなかった。 (140 年前に発見されていた)

しかも名前までついている。

GeoGebra のコマコマンドまである。

シートを編集し直してみた。 (上の動くシート)

赤い点線がこの三角形のノイベルグ曲線。

ちゃんと研究していた人がいるんだと改めて感動した。

私は「中の定理」を拡張しているうちに「ノイベルグ三次曲線」を発見したことになる。

「中三角形」が相似になる為には、等角共役点がオイラー線と平行になる必要がある。

つまり、オイラー線と平行になる等角共役点を求めるとき、ノイベルグ曲線になるということだ。

(この作図の仕方は工夫が必要)

逆に、この曲線上に点をとって、その点からオイラー線に平行な線を引き、交点を求めるとき、この二つの点は等角共役であることがわかる。

目次へもどる