

「ミケルの六円定理」と四角形に内接する楕円の不思議な関係

—四角形に内接する楕円の作図方法—

このページの最終目標は、「四角形からミケルの六円定理を作図する」ことです。

孫：お爺ちゃん、何でこんなめんどくさいことをやっているの？

爺：面白いからだけど、やらなおれん。

孫：癖になっているんだね。

爺：厄介な癖だけど、悪くはない。

孫：このファイルを見ると、いろんな歴史があったんだね。

爺：以前「四角形の内接楕円」が作図できた。一方「ミケルの六円定理」にも内接楕円が出てくる。

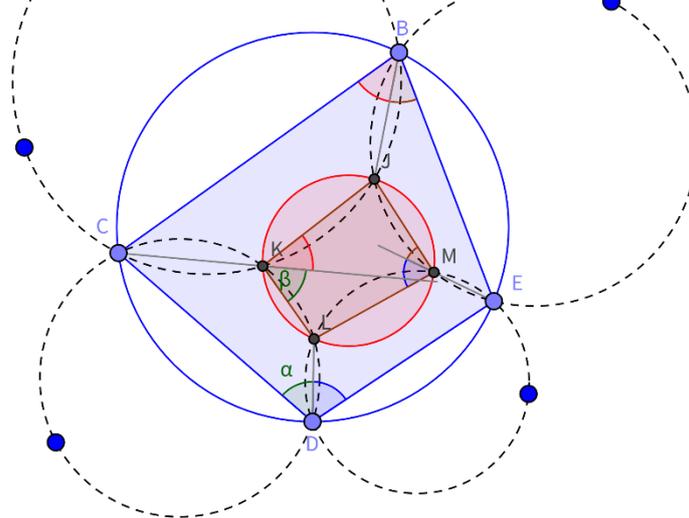
何か関連があるのではないかと、これらをつなげることが出来るのではないかと考えたんだ。

孫：「ミケルの六円定理」って何？

円に内接する四角形 $BCDE$ の各辺を弦とする 4 つの円を描けば、
相隣る円の交点 4 つは同一円周上にある。

証明 $\alpha = \beta$ 向かい合う角の和が 180° であることを示す。

(Miquel 1844)



爺：この作図のナビゲーションを戻してみると、作図の仕方がわかる。

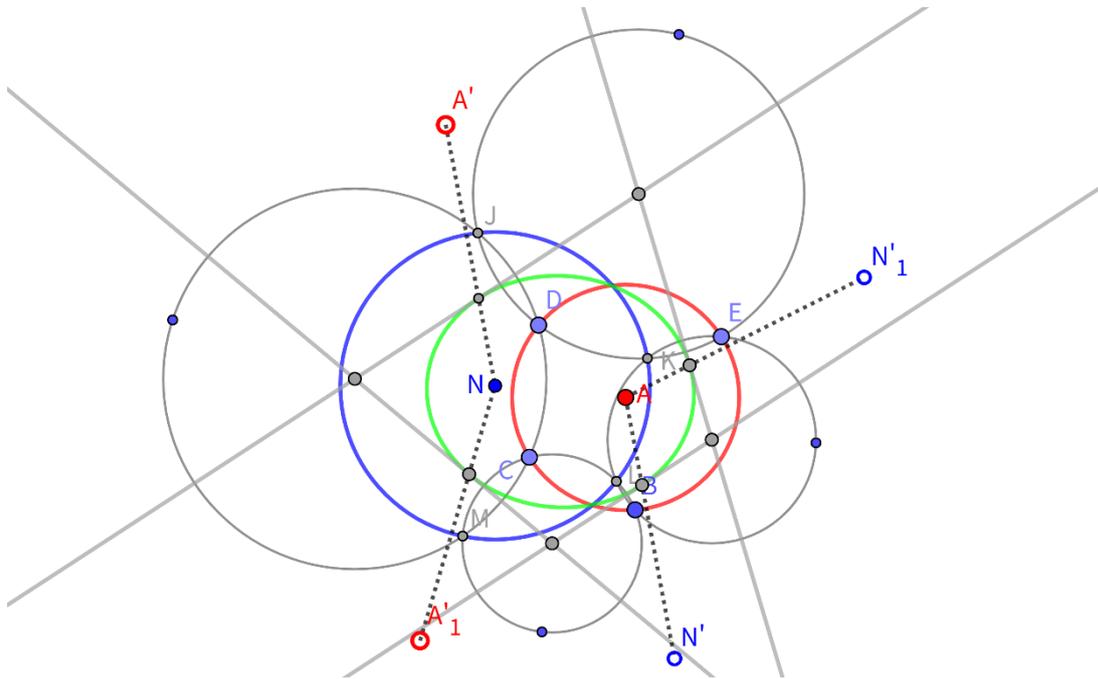
孫：外側に円が 4 つ、共円が 2 つで「6 円定理」か。証明は中学 3 年生ならできるね。

爺：この時、赤円の中心と青円の中心は何だろうと疑問に思った。

そして、「ミケルの六円定理」の二つの円の中心が外側の四角形に内接する楕円の焦点

ではないかと思った。

孫：これらの円の中心の意味を考えたんだね。



爺：その意味が次の図。

孫：なるほど。中心を結んで四角形を作ると内側の円の中心を焦点として四角形に内接する楕円が簡単に作図できるんだね。

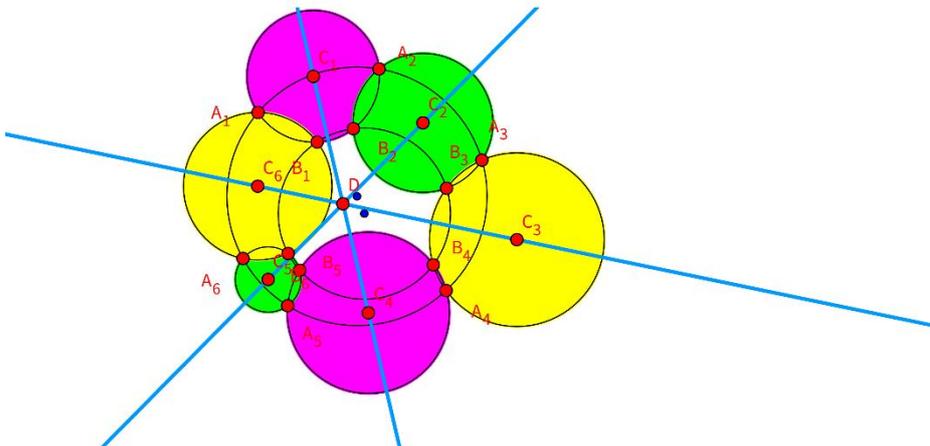
爺：わかってみると簡単だけど、内接楕円をどう作図すれば良いのかだって苦心したよ。

孫：ところで、ミケルの6円定理から内接楕円が作図できるなんてよく気がついたね。

爺：よくぞ聞いてくれた。それは、次の図から。(赤い点 A_3 などを動かすことができる)

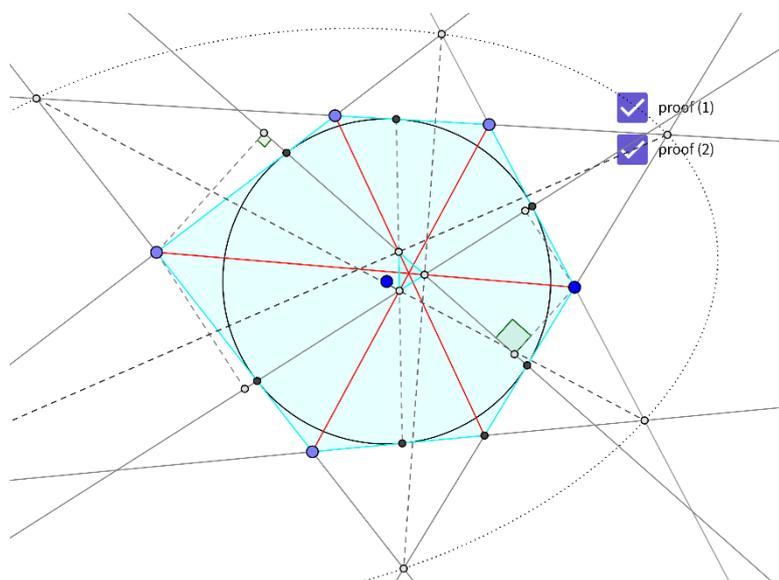
3845. Proposed by Dao Thanh Oai, Kien Xuong, Thai Binh, Viet Nam.

Let the six points A_1, A_2, \dots, A_6 lie in that order on a circle, and the six points B_1, B_2, \dots, B_6 lie in that order on another circle. If the quadruples $A_i, A_{i+1}, B_{i+1}, B_i$ lie on circles with centres C_i for $i = 1, 2, \dots, 5$, then prove that A_6, A_1, B_1, B_6 must also lie on a circle. Furthermore, if C_6 is the centre of the new circle, then prove that lines C_1C_4, C_2C_5 , and C_3C_6 are concurrent.



爺：これを見ていたら、中心を結んだ線が一点で交わっている。これは外接六角形だと感じたから。

孫：そういえば、楕円に外接する六角形の対角線は一点で交わるという性質があるね。



爺：そうなんだ。とするとこれらの円の中心は六角形の頂点ではないか。

孫：そして、内接する楕円の焦点が真ん中の二円の中心ではないかと考えたんだね。

爺：その通り。そして実際に作図してみると、ピッタリ。

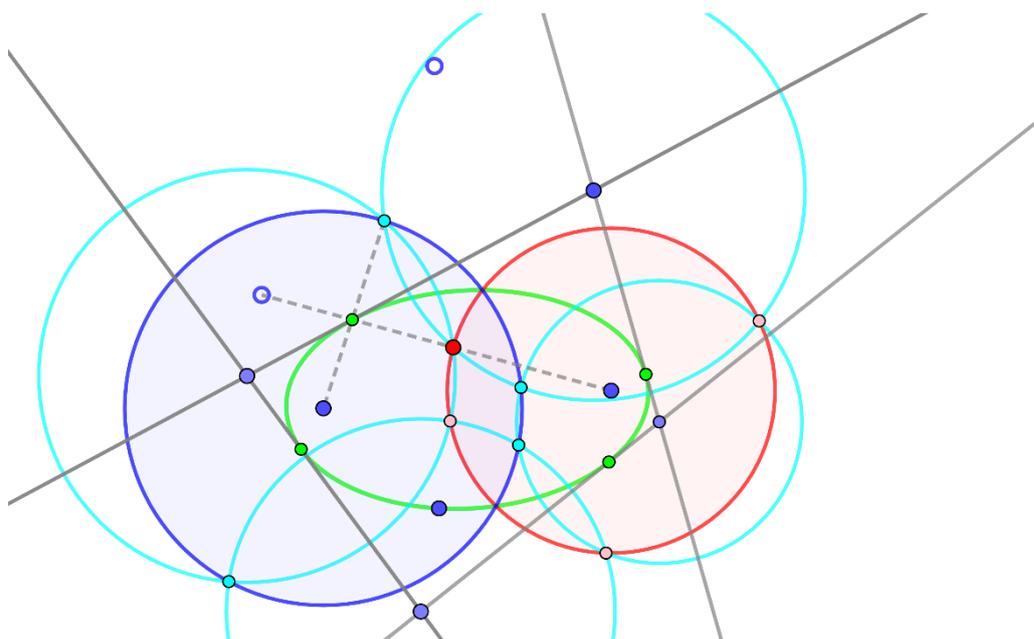
孫：さらに、六角形で言えるのなら、四角形でもいえるのではないかと類推した。

爺：そうなんだ。それがさっきの図。→ [【円と六角形 → GeoGebra】](#)

とにかくここが出发点だった。→ [【ミケルの定理と内接楕円の discover】](#)

孫：ということは、楕円を描いてからミケルの六円定理を作図すれば、ピッタリ合うということだね。

楕円に外接する四角形から「ミケルの六円定理」を作図してみよう。



孫：これは楕円から四角形を作図した。逆に四角形からさっきみたいに楕円を作図できないの？

爺：そうなんだ。逆を考えると世界が広がるからね。ところが、四角形を作図してから「ミケルの六円定理」を作図することは難しい。

孫：どうして？

爺：ピッタリ合う外側の円を描くことができない。

孫：中心の円（共円）が決まっていなくて4円は描けないもんね。さっき描けたのは、楕円の焦点を利用したからだ。

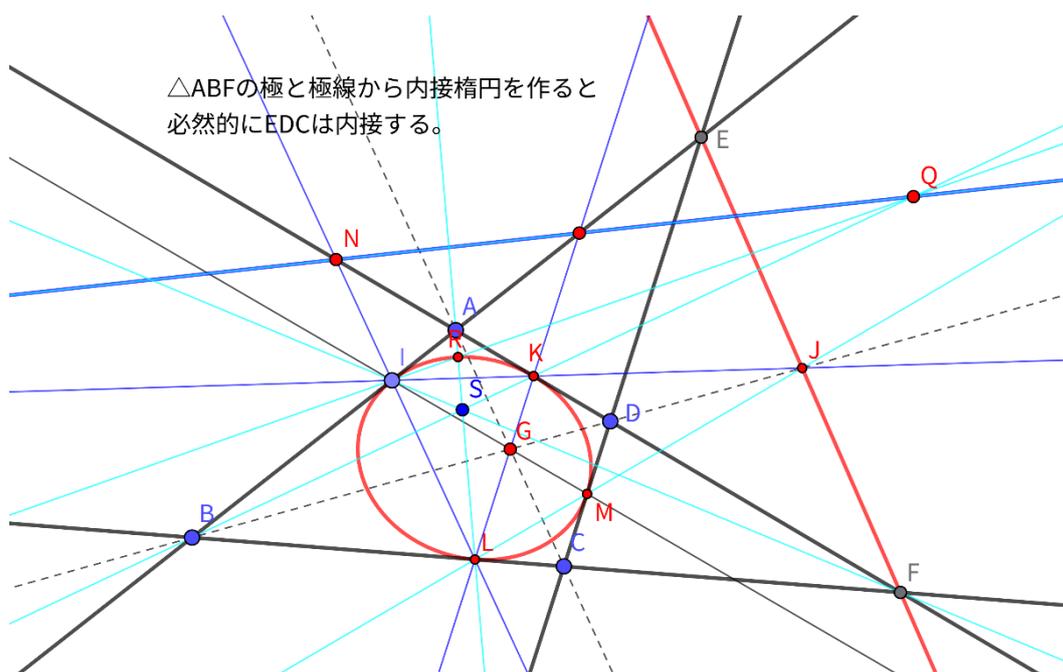
爺：何とか作図することができないだろうかと考えていたら、四角形の内接楕円の作図法を利用すれば良いことに気がついた。

孫：そういえば、この前、「四角形の内接楕円は無数にある」と喜んでたね。

爺：普通は内接楕円というのは焦点がわからないと作図できない。でも、極と極線を用いると内接楕円が作図できる。

孫：爺ちゃんがいつも言っている回り道をするんだね。

爺：そうなんだ。その回り道とは、まず「極と極線による四角形の内接楕円の作図」をする。（1を自由にうごかすことができる）



孫：確かに楕円は動くけど、四角形は動かない。よくこんな作図法を見つけたね。

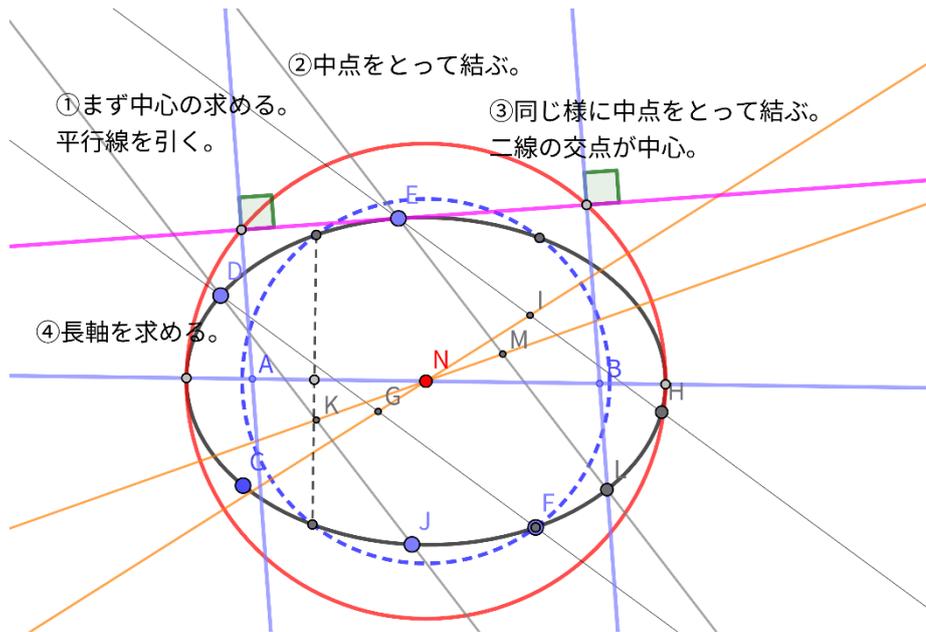
爺：何年もかかったよ。最初は三角形に内接する楕円から。

そしてある四角形に内接する楕円を作図。次に自由に楕円を作ることが出来た。→【[多角形と内接する楕円の作図の仕方](#)】

孫：四角形に内接する楕円の作図方法はわかった。

でも、この楕円には焦点がないよ。

爺：楕円があれば、焦点は求めることができる。



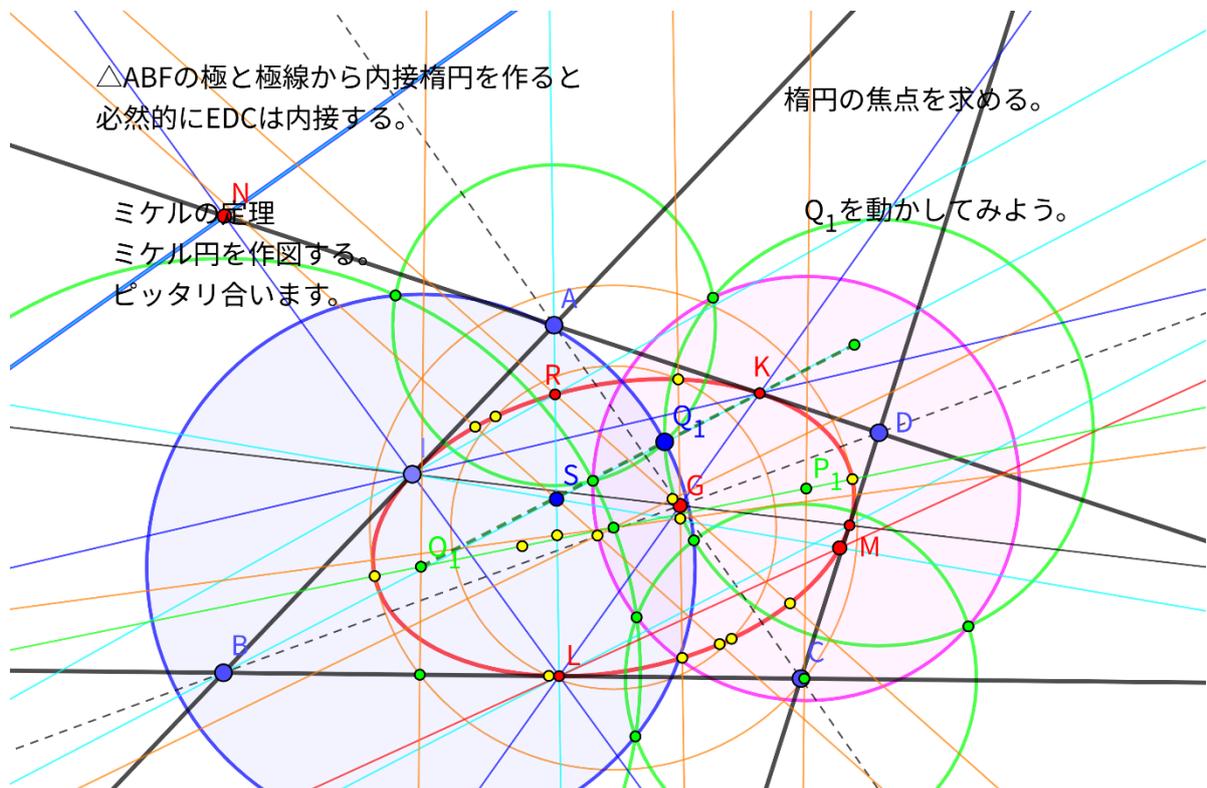
孫：次は、焦点を中心とした共円と頂点を中心とした円の交点を求める。

そして、もう一つの焦点から共円を作図すればピッタリ合うはず。

爺：ピッタリだ！ ちゃんと作図できたね。

孫：つまり、四角形の頂点から「ミケルの6円定理」を作図する条件は、内接楕円の焦点が内側の2円の中心だということだ。

爺：そうだね。この図で、 l を動かすと四角形は変わらないけど、焦点が変化する。



孫：四角形において「ミケルの6円定理」が成り立つためには、もう一つの円の中心がわかっていなければならない。そこで、極と極線から内接楕円を求めて、今度はその楕円の焦点を求め、その焦点を中心とするミケル円を作って作図すると、四角形を変えずにもう一つのミケル円を描くことができる。

爺：つまり、「四角形に内接する楕円の2つの焦点と四角形の4つの頂点が、ミケルの6円定理の中心となっている。」

孫：なるほど、面白いね。でも、ちょっと複雑すぎるような・・・

爺：上図の中にも何か法則があるような気がするけど、今の私には見つけることはできない。

孫：焦点と極との関係かな・・・。調べてみよう。

[目次へもどる](#)