

「極と極線」入門

— 定義を広げる 接線から極線へ —

1. 接線から極線へ

T: この橙円に接線を引きます。まずPを動かしてみましょう。

S：動かしても何も見えてきません。

S：でも、二つの接点の間に何か関係がありそうな気がする。接点を結んでみよう。

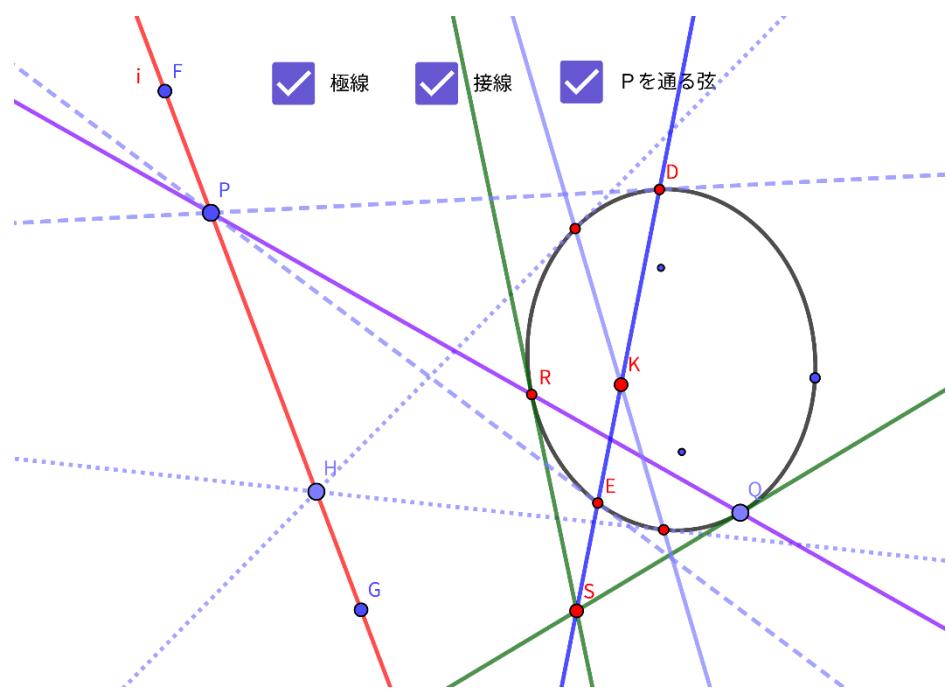
T: この線を引くと見えてくるモノがありますね。この線をPの極線といいます。

S: どうして極線というのですか?

T: Pを極と言います。その極の作る線だから極線です。

S: Pが外にある時は接線が引けるけど、図の中に入ると接線は無くなるから極線も無いのでしょうか？

T: それが今日の学習の大事な課題です。そのポイントは「定義を広げること」です。つまり、Pが楕円の内部に入った時も極線を定義できないかということです。



S: Pは直線上に置いてある。もう一つ別の点Hから接線を引くと・・・

S: 弦(極線)の交点は動かないよ。この点Kの意味は何だろう?

S: もしかしたら、このKの極線がこの直線なのかな。

S: 逆に考えると、Kを通る弦の接線の交点はこの直線上にある。

S: 「Pを通る弦」ってどういう意味ですか？

T: Pを通る弦は無数にあります。Qを動かすと弦QRが動きます。そして、QとRの接線を作図すると・・・不思議な現象が出てくるのです。

S: あれ、二つの接線の交点Sは極線の上にありますよ。どうしてだろう？

T: 不思議ですね。証明してみましょう。

ただ橢円では難しいので円でやります。この橢円の焦点を近づけて円にしてみましょう。ピッタリでなくてもいいですよ。そして円の中心OからPQに垂線を引きます。その垂線と極線DEとの交点をS'とします。OPとDEとの交点をT、OS'とPQとの交点をT'とします。

S: この S' と S が一致すればいいんだ。

S: $\angle T = \angle T' = \angle R$ だから円が描ける。

T: すると . . .

$S : \triangle O T' P \sim \triangle O T S'$
だ。相似比を求めると

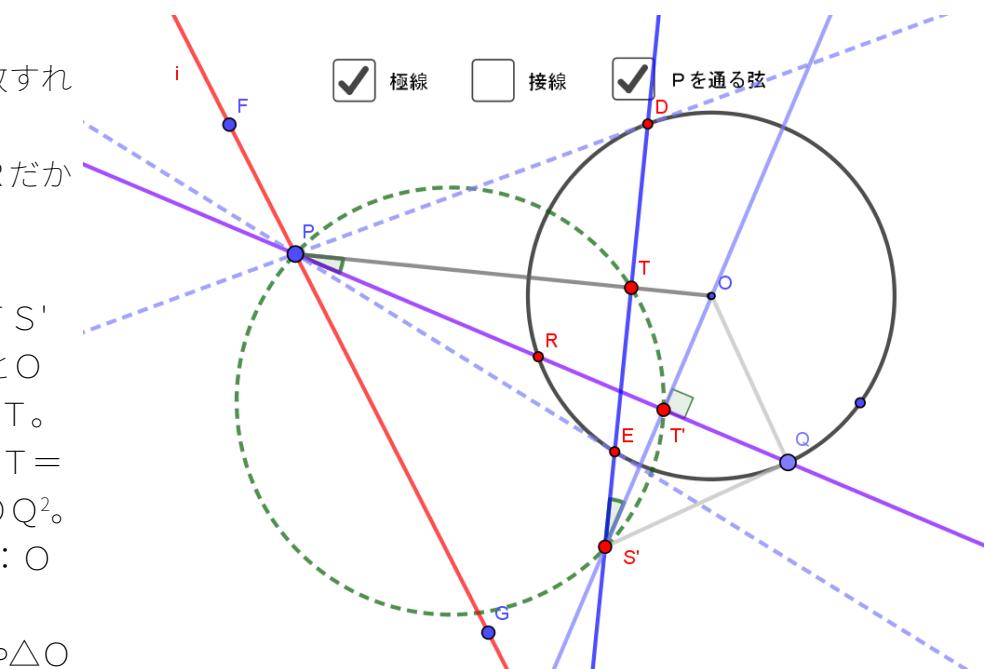
S:つまり、OP・OT=OT'・OS'=r²=OQ²。
 ということは、OT':OQ=OS'。

S: よって△00T'の△0

S'のだから（一魚と比が相等）、 $\angle QOS' = \angle OT'Q = \angle B$

S・つまりのS'はのの接続だから SとS'は一致する。

丁・この定理の逆をポンスレの定理と言います。



「円Oに関するPの極線をABとするとき、AB上的一点P'の極線はPを通る」とても大事な定理です。

⇒ 【ポンスレの定理】

S: 円だと接線の性質から直角になるのでPを通るんだ。でも円では成り立つことはわかったけど、これは橢円ですよ。

T: 田で成り立った図をスライドにして斜めの壁に映します。どんな図になるでしょうか？

S: 形は変わるけど直線は直線になる。位置関係は変わらないな。そして円は橢円になります。

S:つまり楕円でも成り立つわけだ。Sの極線はPを通る。

2, 極線をどう定義するか

T: さて、今度はGを動かして、Pを橜円の中に入れてみよう。

S: 接線は消えますね。でも、弦は引くことができるし、QとRの接線は引けます。

S: Dを動かすと、この接線の交点の軌跡は直線を描く。でもこの直線をどうやって作図したらいいの？

T: Pの極線の作図の仕方は上のアイコンの4番目（垂線）をクリックして6番目（極線）を選び、Pをクリックしてから橜円をクリックすれば作図できます。

S: なんだ簡単に作図できるんじゃない。どうして早く教えてくれなかったの。

S: これで橜円の中に極がある時の極線が定義できる。「極Pから橜円に弦を引いて、QとRの接線の交点の作る線が極線。」

T: さっきKの極線がFGになるんじゃないかと言っていたけど、その通りなんですね。

S: 今までの事から「極が外部にあれば接点を結んだ線」。「内部にあればPを通る弦の接線の交点の作る線」。

S: それに、ポンスレの定理により、「極線上の点の極線は元の極を通る」＝「極の弦の作る接線は極線を作る」。

3, 極線の性質

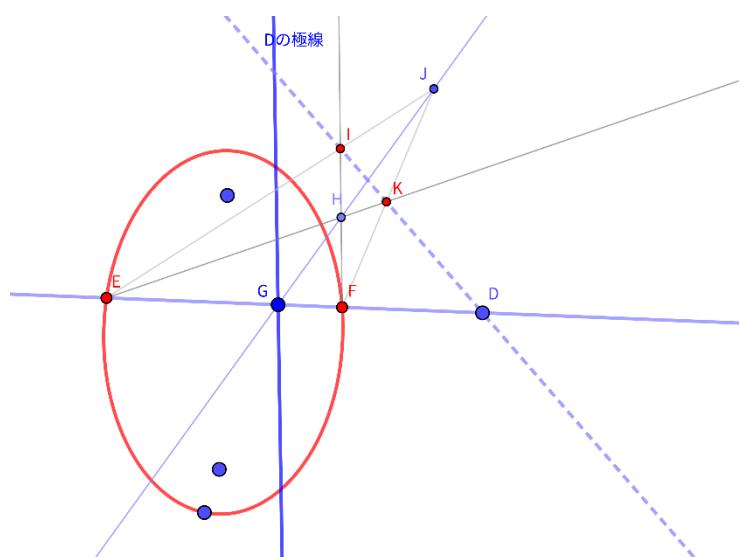
T: 今度は極線の性質を調べてみましょう。大事な性質の一つに内分・外分の関係があります。

S: この図で $EG : GF = ED : DF$ ということですね。

T: この関係は次の式で表すと便利です。

$$EG/GF \cdot DF/ED = 1$$

S: 極と極線は図形を内分と外分に分けるんですね。



T: この図の J の意味については [【三角形の極と極線への誘い】](#) へ

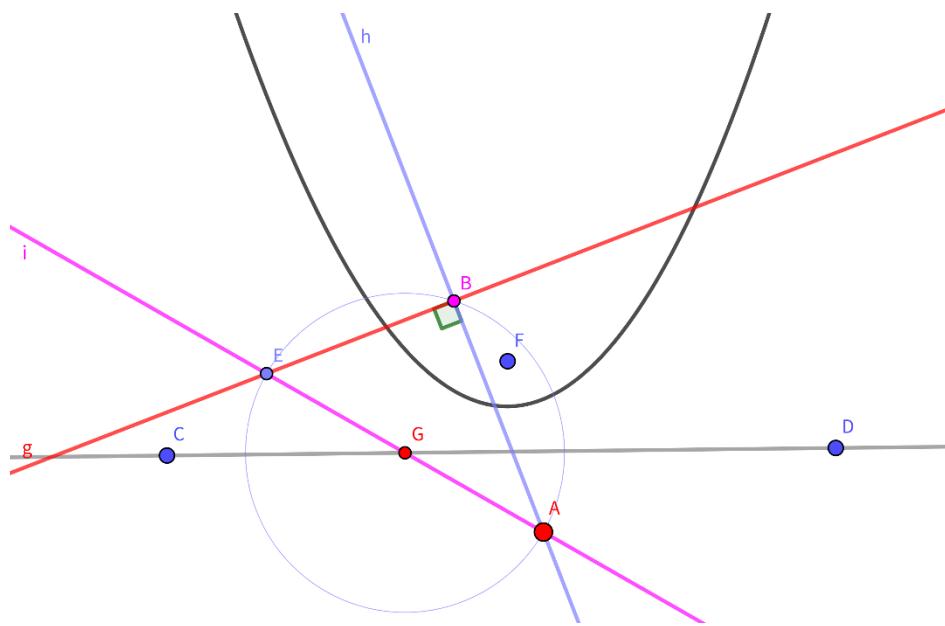
4, 極線の面白さ

T: 放物線でも極線を考えることができます。F が焦点で C D は準線です。

S: 準線というのは焦点の極線なんですね。

S: 準線上の点からの接線は直角じゃない?

...



S: 直角三角形の斜辺が準線で二等分されていますね。

T: 極と極線の性質のまとめを書いておきます。

① 「ラ・イールの定理」

極 P の極線上の点の極線は P を通る。

極線が P を通れば、その極は P の極線上にある。

② 極 A の極線上を点 P が動く時、P の極線は A を中心に回転する。

③ 極線が一点で交わる時、その極は一直線上にある。

④ 極を通る円錐曲線の二つの接点は極線上にある。

⑤ 点が自身の極線上にあるなら、その点は円錐曲線上にある。(つまり接線)

⑥ どの直線も円錐曲線に対して極を持つ。

S: これらは定理として用いても良いのですね。

T：そうです。これらは体験して身につけると当たり前に感じてきます。
GeoGebra でさらに深く調べてみましょう。

[【円の極と極線】](#)

[【円に外接する多角形の極と極線】](#)

[【極と極線が示す円と三角形・四角形・六角形の対称性】](#)

[目次へもどる](#)