

第 1 1 章 式の計算と因数分解のたとえ

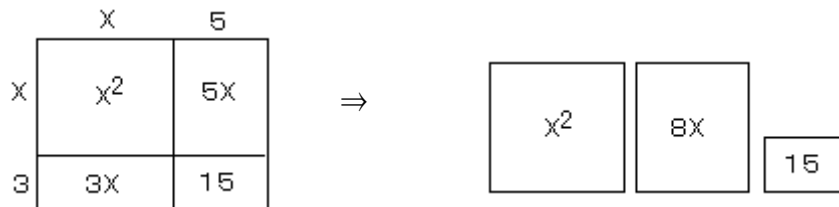
【第 1 話 展開と因数分解】

面積図を使うと、展開や因数分解などの式の計算が簡単にできる。たとえば、

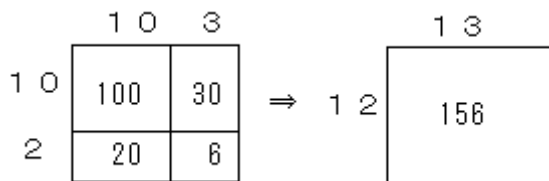
$$(x+3)(x+5) = x^2 + 8x + 15$$

左辺は縦×横で、右辺はその長方形を 4 つにばらし、同類項を足すことになる。

--長方形をバラバラにするから、展開というのか。



これは、数の計算を拡張したものであり、数の計算もこの方法でできる。



『第 2 話 田んぼシェーマ』

縦も横も x の正方形と、縦は x で横は 1 の長方形、縦も横も 1 の正方形を作る。

面積を考えてみよう。縦も横も x の正方形は x^2 、縦は x で横は 1 の長方形は x 、縦も横も 1 の正方形は 1 の面積になるね。さて、 x の 2 乗の正方形は 1 個。 x の長方形は 5 個。 1 の正方形が 6 個ある。これを並べなおして、一つの長方形にしてみなさい。

--きちんとした長方形でないといけないわけですね。

--できた。



この長方形の面積は？

-- $x^2 + 5x + 6$ です。

--縦×横で、 $(x+2)(x+3)$ でもいい。

面積図をバラバラにすることを展開といいます。このように、逆にバラバラのタイルを一つの長方形にする事を因数分解といいます。

割り算 $\longleftrightarrow$ かけ算
 | |
 因数分解 $\longleftrightarrow$ 展開

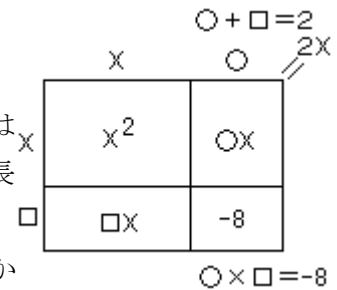
この時、面積図を使うと大変便利です。この面積図は田んぼに似ているのでこの図を田んぼシェーマと名付けます。

--田舎臭いネーミングだね。

$x^2 + 2x - 8$ を田んぼシェーマを利用して、因数分解してみよう。

x^2 は左上に、 -8 は右下に入れる。 x の2乗は正方形だから1辺の長さは x 。 -8 は $\bigcirc \times \square$ で -8 の長方形。左下の長方形の面積は $\square x$ で、右上の長方形は $\bigcirc x$ 。両方足して、 $2x$ になる。

--かけて -8 、足して 2 になる2つの数は、 4 と -2 だから、 $\bigcirc$ と $\square$ が分かります。



OK! だから、縦 $\times$ 横で $(x - 2)(x + 4)$ と因数分解できます。

--なるほど。良く分かる。

『第3話 アラビアンナイトとアラビア数字』

この絵を見てください。この話の主人公は、誰だか知っていますか。

--アラジンとアリババとシンドバット。



この物語の書いてある本を。

--アラビアンナイト。千夜一夜物語。

この本は実に面白いから、是非読んで欲しいな。これは、今から千年前、シンドバットのいた世界。このイスラム帝国は、アジア、アフリカ、ヨーロッパにまたがる大帝国を築き、当時の世界の文明の最先端をいていた。日本は奈良時代だ。

--それで、奈良大仏のつもりか。



さて、この国の残した遺産が、先程のアラビアンナイトという本だが、もう一つある。それは何か。

--?

ヒント。今でも使われているし、我々の生活に欠かす事ができないくらい重要なものです。

--数字?

そう。皆の使っている数字をアラビア数字という。この数字は、たった十個の文字だけで全ての数を表わすことができる。よく時計の文字盤に使われているローマ数字 (I II III IV V VI VII VIII IX X C L M D =

50 C=100 L=500 M=1000)は、この東ローマ帝国からヨーロッパに広まっていた。
当時の中国の唐では、漢数字（一二三四五六七八九十百千万…）が使われていた。
--日本も漢数字だね。

この三つの数字を比べてみよう。

漢数字だと 一千九百八十六年

ローマ数字だと MLCCCDCXXXVI年

アラビア数字なら 1986年

--アラビア数字だと0を入れて10個の数字ですむけど、漢数字やローマ数字では十百千の位の数字もいる。

--ローマ数字よりは漢数字の方が簡単。

このアラビア数字は表わし方が便利だけではない。計算も大変便利なのだ。

たとえば、

漢数字で一千九百八十六×三百二十七を計算してみよう。

一千×三百	=	三十 万	
一千×二十	=	二万	
一千×七	=	七千	
九百×三百	=	二十七万	
九百×二十	=	一万八千	
九百×七	=	六千三百	アラビア数字だと
八十×三百	=	二万四千	
八十×二十	=	一千六百	1 9 8 6
八十×七	=	五百六十	× 3 2 7
六×三百	=	一千八百	1 3 9 0 2
六×二十	=	一百二十	3 9 7 2
六×七	=	四十二	5 9 5 8
足して		六十四万九千四百二十二	6 4 9 4 2 2

ローマ数字だともっと大変。あまりに計算が大変なので、発達したのが？

--そろばん。

--ヨーロッパにもそろばんがあったの。

アラビア数字が入ってくる前のヨーロッパでは、ローマ数字だからこの計算がさらに複雑になる。だから、算盤というそろばんの一種が使われていた。十字軍を通じてこの優れた文化が、アラビアからヨーロッパに伝わったのは、この後のこと。

--今の計算の方が、ずっと楽だね。

今、みんながやっている計算方法はこの時代に基礎が作られたんだ。

--そんなに昔からあるの。

この数字と計算方法を発展させ、全世界に伝えたのが、シンドバットやアラジン、アリババ達アラビアの商人だったのだ。

--商売と計算は切り離せないもんね。

--アラビアンナイトとアラビア数字は別々のものではないということを言いたかったのか。

--私は、アラビアンナイトの主人公達が商人というのが不思議だったけど、理由がわかった。

ただし、彼等は架空の人物。この計算を発展させた実在の人物を紹介しよう。今から千年ほど前、アッバス朝の主都バクダッド（当時、100万人をこえる人口をかかえ《平和の都》と言われていた。）の大数学者アル=クワリズミ先生。彼は、インドから伝わったアラビア数字を基に計算法を考えそして、二次方程式の解き方まで考えていた。この先生の名前は今も使われている。アルゴリズム体操って知っているね。

--ピタゴラススイッチの後に、「いつもここから」がやっている体操でしょ。

「わしの名はアブー・アブダラ・ムハマッド・イブン・ムーサー・アル=クワリズミ・アル=マグジーである。今から千年ほど前、バクダッドで活躍した大数学者じゃ。わしはめんどくさい計算を簡単にすることを考えた。そして、2次方程式を図を使って解いたのじゃ。図を使ったのは、当時Xを使うような文字式がなかったからじゃ」

『第4話 アル=クワリズミ 』

この問題がアル=クワリズミの出した問題だ。

さあ、挑戦してみよう。

《輝く瞳を持っている美しい乙女よ、貴方は平方根の正しい求め方を知るや。しからば、我に語れ。ここに1枚の正方形の板があり。この正方形の4隅から1辺3cmの正方形を切取って箱を作ったところこの箱の全表面積が64cm²なり。この箱の底面の正方形の1辺はいくらなりや。》（本当は、違う問題だが解きやすいようにアレンジした）

--まず、図を書けばいいのだな。

--展開図を書いて、分かっている事を書込むと。

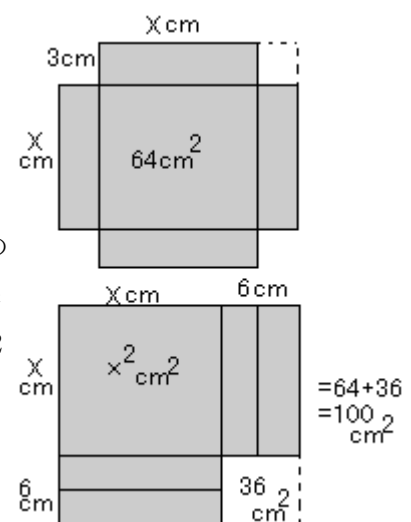
--そうか！

--小さな正方形の面積が9cm²だから、全部で36cm²となり、元の正方形の面積は36+64=100cm²となります。面積が100cm²の正方形の1辺は平方根をとって10cmになるから、10-3×2=4cmが答です。

素晴らしい。アル=クワリズミのやり方とほとんど同じだ。

ただし、100の平方根は±10ですよ。

--忘れてた。でも、長さだから-10は当てはまらない。



--別のやり方だけど、3cmの正方形を1ヵ所に集めて、側面を右と下に持ってくると、田んぼシェーマになります。

--それを式にすると

$$(x+6)(x+6)=36+64=100$$

平方根を使って、 $x+6=10$

$$x=4$$

おっ！ここまで考えると、もうアル=クワリズムを超えている。

--なるほど。こうすると、因数分解ができるし、展開すれば2次方程式ですね。

ただし、アル=クワリズムの時代には負の数はなかった。だから、彼は正の数しか答に入れていない。

--式で考えると、

$$(x+6)^2=100 \text{ だから}$$

$$x+6=\pm\sqrt{100}$$

$$=\pm 10$$

$$x=\pm 10-6$$

$$=4, -16$$

となるけど、彼は-16は答と認めなかったんだな。

--この板の長さが-16cmなんておかしい。

2次方程式は田んぼシェーマを使うと簡単に解けます。

$x^2+6x=5$ を解いてみよう。

まず、これを面積図で表わします。 $x(x+6)=5$

左の長方形を正方形にすると、平方根が使えます。どうしたら正方形になるかな。

-- $6x$ を $3x$ と $3x$ に分けて、 x の2乗の右と下に付ければ正方形になります。

--でも、足りないところがあるよ。

どれだけ足りないの。

--正方形だから、 3×3 で9だけ足りない。

それを左辺に足すと？

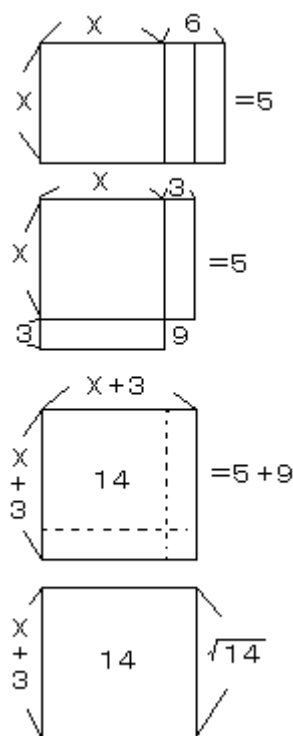
--右辺にも足さなくてはいけない。

$$\text{--式は } (x+3)^2=9+5=14$$

--平方根を使うと $x+3=\pm\sqrt{14}$

--つまり、 $x=-3\pm\sqrt{14}$ ということか。

--これが、答なの？



平方根表を使って計算すると、 $0.741657\dots$ と $-6.741657\dots$ の二つになる。
-- $\sqrt{}$ を使って書いても答なんですか。

少数で表わせないから $\sqrt{}$ で表わします。ちょうど割切れない時に分数で表わすようなものです。
--ややこしくてなんだかわからないなあ。

【第5話 「因数分解」と「代入」のアナロジー】

TV「たけしの新・教育白書」で、北野武さんと池上彰さんが、数学について面白いことを話していた。

北野武さん

「映画は因数分解を使う。共通したシーンをこうやってまとめる。

$$a b + a c + a d = a (b + c + d) \quad \dots(1)$$

見た人は無意識のうちに展開してあらすじを理解する。」

池上彰さん

「ニュース解説では、わかりやすく説明するために共通項を見つけ出し、それでくくるとわかりやすくなる。つまり因数分解と同じ。

$$a b + a c + d e = a (b + c) + d e \quad \dots(2) \quad \text{」}$$

映画における表現は、省略するために如何に因数分解をするかと考えることであり、社会の変化は、共通項を見だし、違って見えるものをそれでくくって説明するとわかりやすいということを示している。

【e x. 1】

[ラーメンとキツネザル] (共通項＝大陸から移動しニッチの中で独自に進化した)

この共通項を用いると、まるで違うと思えるラーメンとキツネザルをカッコでくくることができる。

これを聞いて、なぜ映画やニュースと因数分解を結びつけることができたのかが気になった。

数学から見ると、

「数学の因数分解が、映画の省略法やニュースの説明法のアナロジーに使われている」

ということだ。これは、因数分解の考え方は案外普遍的であることを示している。しかも、二人とも思考の道具としてこの方法を使っている。

映画	↔	因数分解
ニュース解説	(同じ項目でまとめる)	

この関係は、左右が同値であることを示している。

しかも、映画やニュースは具体例で、因数分解は一般化である。

では、その因数分解の「働き」(考え方)とは何だろうか。

- (1) 共通項（共通因数）を見いだす
- (2) 共通項でくくる
- (3) $2ab + 3ab = (2 + 3)ab = 5ab$ （同じものを一くくりにする）
- (4) 似た物をまとめる （省略する）
- (5) $8 \times 5 + 8 \times 4 = 8 \times (5 + 4)$ （簡単にする）

二人は最初から因数分解を当てはめたのではなく、いろいろやっているうちにこれは因数分解と同じコトだと気がついた。どうやって気がついたのか、なぜ結びついたのかの説明はなかったが、二人がたまたま同じコトを話したということから、さらなる因数分解が考えられる。

映画＋ニュース解説 → 「因数分解」

つまり、映画の表現とニュース解説という別のコトを、因数分解によって結びつけることが可能となる。（これを「因数分解」とする。）「因数分解（共通項を見つける）」という発想法は、かなり強力な方法であることを示している。そして、「因数分解」できるのは、映画やニュースだけではないことに気がつく。

では、「因数分解」の逆は何だろう。

普通、因数分解の逆は？と聞かれると「展開」と答えるが、この場合の逆は展開ではない。

実は、「因数分解」 → 映画・ニュース に対応するのは「代入」である。「因数分解」に映画を「代入」すれば省略という表現になり、ニュースを「代入」すれば解説という表現になるということだ。

つまり、「因数分解」と「代入」を対応させると、次のようなアナロジーが浮かんでくる。

代入	↔	因数分解
具体化		一般化（法則）
個別化		抽象化（概念）
あてはめる		くくる

【ex. 2】

具体物 → 箱 → 式 → 因数分解 → 置換 → 剰余類 →
 因数分解も含めてここには「因数分解」の方法が使われている。

「因数分解」は分類し一つにまとめて括り出すという志向性がある。

一方、「代入」の方は、具体的な現実世界の方に引き寄せる働きがある。

【ex. 3】

北野武さんは、 $a = \text{暗殺者}$ $b, c, d = \text{被害者}$ を因数分解の(1)式に代入するという説明をしていた。そうすると表現としてどうなるのか想像してみしてほしい。そして、ここにはいろいろな値が入ることも想像できる。

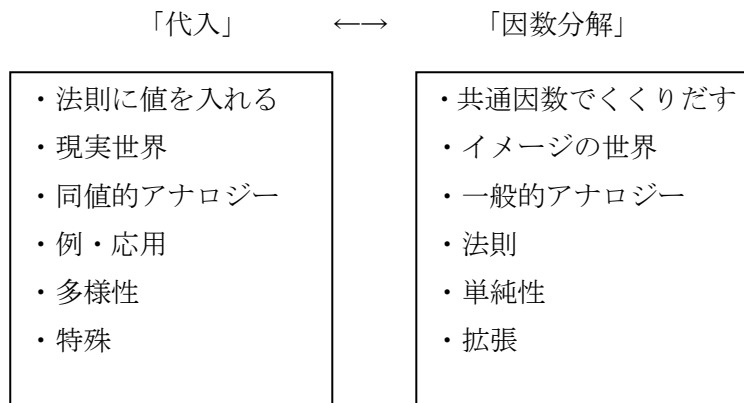
【e x. 4】

国語の文章には代名詞がよく出てくる。これ、それ、あれ、は何を示しているか。それが正しいかどうかは「代入」してみればわかる。

【e x. 5】

実は、これまで用いてきた「例」というのも「代入」である。

私たちの思考は、「因数分解」をして「代入」をするという運動を常に繰り返している。



まとめ

映画 ↔ ニュース ↔ 因数分解

こういう自在なアナロジーができると楽しい。

世に様々にある法則に様々なモノを代入しているというトレーニングもまた楽しい。