

九点円から垂足円へ

— 外心と垂心の作る円が9点円 —

S：三角形って図形の原子みたいなものでしょう。合同条件以外に何かあるのですか？

T：三角形は単純に見えるけど、実はもっと奥深い意味の宇宙があるのです。

S：原子をさらに分けることが出来たように、三角形もっと分けることができるということ？

T：そうですね。でも、分けるというよりも拡がると言った方が良いかな。

やっているうちにいろいろ興味が出てきて、さらに追求していったらいつの間にやら拡がってしまっていたんです。

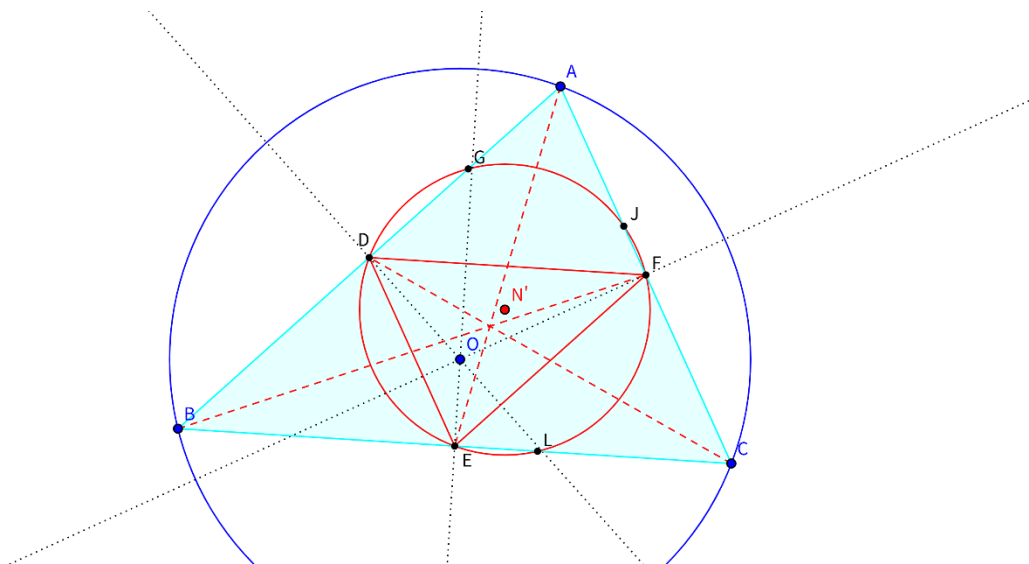
そして、調べる手法は「二つのコトの対比」。それは最終的には角度と長さの対比に集約されます。

1、中点三角形

T：まず三角形から新しい三角形を作ることから始めましょう。

S：一番簡単なのが、各辺の中点を結んでできる三角形ですね。

T：これを中点三角形と言います。これを見ているといろいろなことに気がつきます。



S：中点連結の定理で、各辺が平行で相似ですね。

あれ？ $\triangle ABC$ の外心 O が $\triangle DEF$ の垂心になっているんじゃないですか？

T：いいところに気がついたね。証明できる？

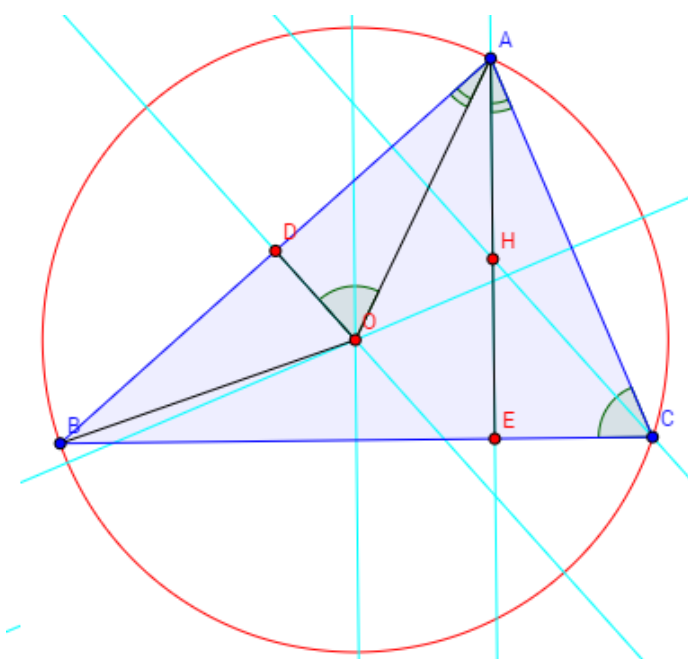
S：FE は平行だから垂直二等分線は頂点を通る垂線になる。

T：じゃあ、今度は重心はどうなっている？

S：あれ？重心はやっぱり重心か。だって、中線は平行な線をに等分するからね。
T：いいねえ。今中線という言葉が出て来たけど、この図の点線の線のことですね。
S：とすると、 $\triangle DEF$ の中点三角形を作っても重心は変わらないということだ。
S：重心に向かって三角形がどんどん小さくなっていくよ。
T：では今度は、逆に大きくして見よう。
S： $\triangle ABC$ を中点三角形とする三角形を作図しようということですね。やってみよう。（作図）

...

S：簡単だ。底辺の平行線を頂点から引けばよい。三つの平行線の交点が新しい三角形の頂点。
T：この三角形を「逆中点三角形」と名づけるよ。さて、それぞれの頂点が中点であることはわかりますか？
S：中点連結定理から当然だけど、不思議に感じるな。
T：逆中点三角形の外心はどこかわかる？



S：もちろんこの垂心だ！そして、外接円の半径は二倍。重心は変わらない。

外心が垂心に変わるということは、垂心と外心は何か特別な関係があるような気がするな。

T：いいセンスをもっていますね。では、この図の中に相似な三角形があるんだけど。

S： $\triangle AOD \sim \triangle ACE$ だ。O と B を結ぶと中心角ができて、円周角 C の 2 倍だから、 $\angle O = \angle C$ ということがわかる。

だから、 $\angle OAD = \angle CAE$ だ。

T：つまり、この角度が等しいということは？

S：外心と垂心は $\angle A$ の二等分線に対して対称になっているということかな。

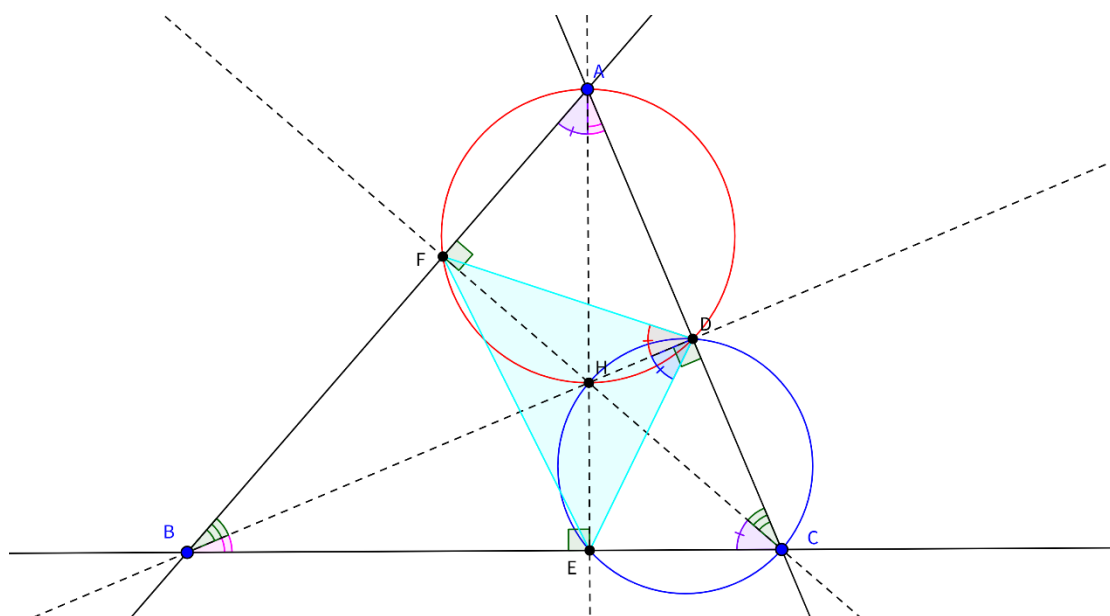
T：鋭いね。このことはどの頂点に対しても成り立っているから、
外心と垂心は角度に関して兄弟みたいなものということだね。
これは、後から大事なことを指し示してくれます。
そして、この逆中点三角形は次にやる垂足三角形と結びつきます。

⇒ 【中点三角形をもっと調べたい人の為に】

2、垂足三角形

S：垂足三角形というのは、垂線の足を結んで出来る三角形 DEF のことですね。

T：この図を見て何か気がつくことはないだろうか。△ABC の垂心 H'は何に変わるの？



S：垂心ではない！もしかしたら内心なの？

T：よく気がついたね。証明出来るかな。

S：直角三角形だから、 $\angle BAE = \angle BCF$ 。さらに一つの円周上にあるから円周角の定理を使うと、 $\angle HDF = \angle HDE$ だ。

T：では、さっきの逆中点三角形と同じように、△ABC を垂足三角形にする三角形を作図してみよう。

S：どうすればいいのかな？・・・さっき、垂心が内心になったんだから、今度は内心を作ればいいんだから・・・

S：つまり、角の二等分線をひけばいいんだ。・・・あれ？これって傍心三角形じゃないの。

T：そうなんです。（鋭角三角形の）逆垂足三角形は傍心三角形ですね。

S：面白いな。逆中点三角形では重心は変わらなかったけど、今度はどうだろうか。

T：今までのことを対比（対）でまとめてみよう。こういう対比をさせていくと、いろいろ予想ができて発見がしやすくなります。

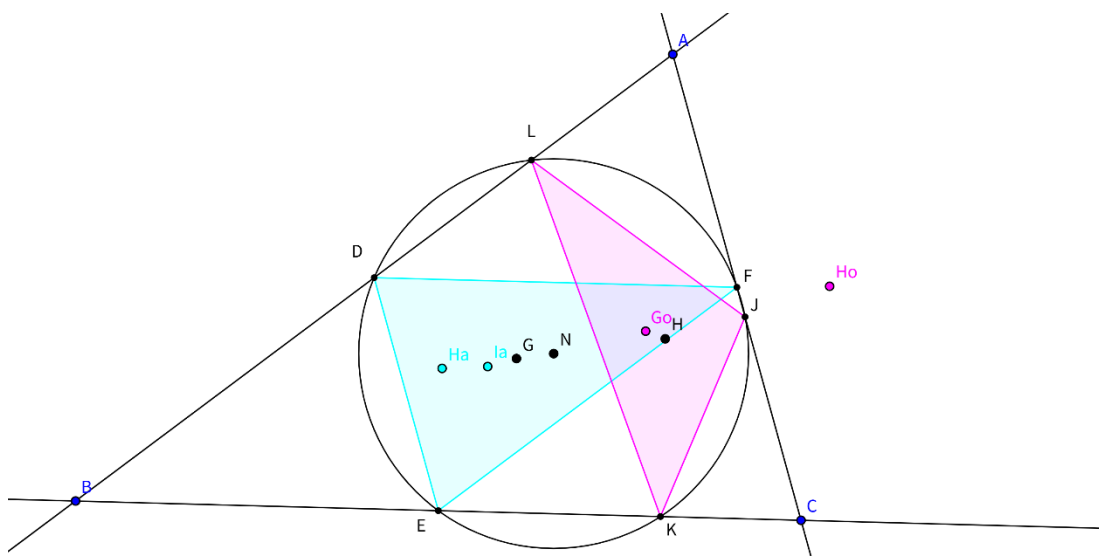
○中点三角形 ○垂足三角形
 外心⇒垂心 垂心⇒内心
 重心は同じ

○逆中点三角形 ○傍心三角形
 辺の中線 角の二等分線

⇒ 【傍心三角形についてもっと調べたい人の為に】

3、9点円

T：中点と垂足の二つの三角形は別々のように見えるけど、実は共通しているところがある。



S：もしかして、外接円が一致していることじゃないですか。

T：そうです。この中点三角形と垂足三角形の外接円を9点円といいます。

S：どうして「9点」なのですか？

S：まず垂足三角形で3点、中点で3点で計6点。あと3点は？

S：さっき小さな円を作図したよね。この円の中心（垂心と辺との中点）も通るんじゃない？

S：この円の中心は？作図してみよう。（垂心と頂点との中点を作図）

T：これで、外接円と内接円と傍接円と9点円と6つの円が結びついたことになります。

S：9点円の半径は外接円の半分だ。中点三角形を見るとすぐにわかる。

T：9点円は中点三角形と垂足三角形を結びつける大事な円です。

そして、さらにいろいろな面白いことが現れてきます。

⇒ 【9点円をもっと調べたい人の為に】

T：ここで注目してほしいんだけど、逆中点三角形と傍心三角形を対比すると、辺の二等分（中点）線（中線）と角の二等分線というように対になっている。

S：垂足三角形から元の三角形を作るには、角の二等分線を引くし、中点三角形から元の三角形を作るには、辺が2倍になる様に作図していますね。

S：逆に言えば、角度と長さの半分だ。

T：垂足三角形と中点三角形では浮かんでこなかったけど、傍心三角形と逆中点三角形にすると9点円が見えてくる。

4、垂足円

T：ここで9点円をさらに拡張してみましょう。

S：どうやって拡張するのですか？

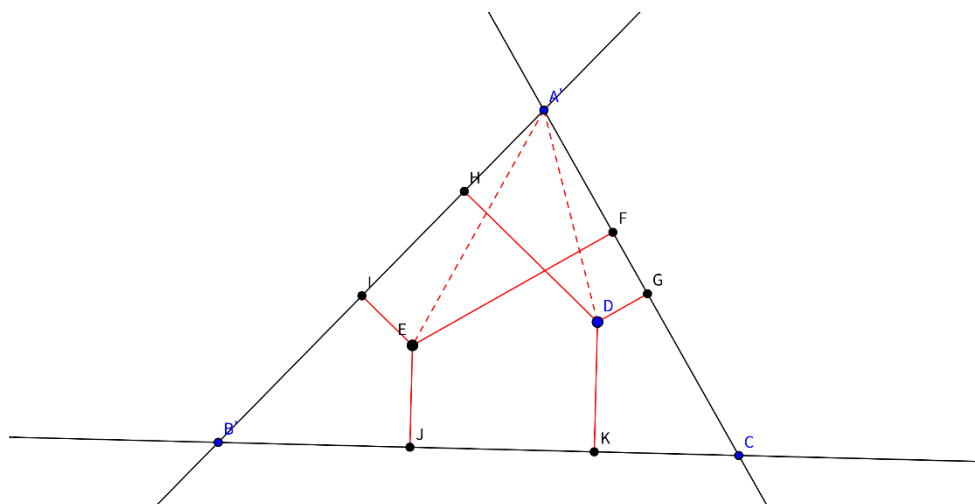
T：垂足三角形で円を作図すると、もう一つの垂足三角形が現われます。これらの足から3垂線を引くと一点で交わります。

S：とすると二つの交点ができるわけですね。この二つの点は、さっきやった外心と垂心と同じで辺からの角度が同じになる。

T：そうなんです。この二つの交点の間の関係は等角共役点なのです。

S：そうか外心と垂心の等角共役の関係を広げるのですね。

T：下図でDとEは等角共役点です。そうすると、この6つの垂足は同一円周上にあります。



S：証明してみよう。

$\triangle AEI \sim \triangle ADG$ なので $AI/AG = AE/AD$ 。 $\triangle ADH \sim \triangle AEF$ なので $AF/AH = AE/AD$ 。

$\therefore AI \cdot AH = AF \cdot AG$ 。 よって HIFG は同一円周上にある。

S：ということは円が描ける。円を描いてみよう。

S：逆に、自由な点Dをとって、そのDから垂線を下して垂足円を描いて、もう一組の3点

から中心Eを求めると、DとEは等角共役となりますね。

S：つまり角度を等しくしなくても、垂足円を作図すれば、等角共役点がわかるということだ。だから垂足円は9点円の拡張になっているんですね。

S：この等角共役ってどういう意味が有るのですか？

T：三角形の点はペアになっている事です。具体的には次の【[傍接楕円](#)】の作図などに利用できます。

S：そういえば三角形の心にも等角共役点でペアになっている点がありましたね。

⇒ [【9点円の拡張＝垂足円について】](#)

⇒ [【三角形に関する様々な定理】](#)を知りたい人の為に

⇒ [【三角形の直角双曲線】](#)

[目次へもどる](#)