

第3章 図式の意味・・・「同じ」と「違い」

発問3-1 この図式（ダイアグラム）は役に立つの？

「役に立つ」というのはモデルになるということです。
そして、使えるという意味があります。
何に使えるのかというと、考えることに使えるのです。
考える＝図式（ダイアグラム）を使うというくらいにならないと、役に立つとは言えません。

例を4つ出しましょう。

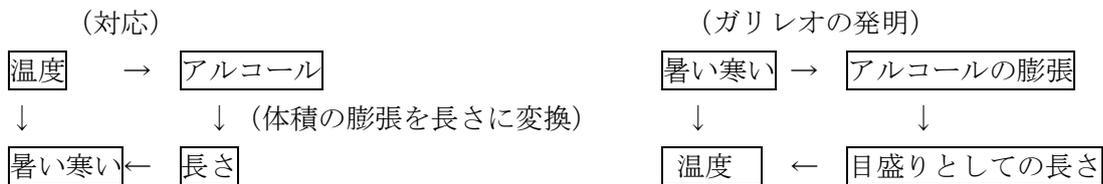
例1 モノを分析する時に役立ちます。

【ガリレオの温度計】

温度計はガリレオが水を使って考えたのが最初です。
ガリレオは、どう考えたのでしょうか？

発問3-2 温度計は何を何に置き換えているのでしょうか？

私たちが感じる温度は、寒い暑いという曖昧な感覚です。
それに対して、ガリレオは何か絶対的な「ものさし」がないかと考えます。
そして、寒暖に対応して変化するものを探しました。
ガリレオは水の膨張に目をつけましたが、ここではより膨張率の高いアルコールを使いましょう。



この対応が関数です。
関数については後で詳しくとりあげます。

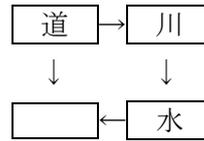
例2 対象を調べる時に、何をやったらいいのか考える時に役立ちます。

【道と川】

私は高校生の時に、地理の先生が教えてくれたことが今でも心に残っています。
それは、道と川の話でした。

道と川はよく似ています。
道は分かれます。川も分かれます。
川は水と土を運びます。道は物資や人を運びます。

どちらも、「流れる」といいます。
 上流と下流があるように上りと下りがあります。
 太くなったり細くなったりします。
 川には堆積作用があり、平野を作ります。
 道の堆積作用は何を作るのでしょうか。
 そうです、町を作ります。



発問 3-3 川には自然堤防ができます。この堤防は洪水で決壊します。
 このことは、道では何にあたるのでしょうか？

自然堤防は道の周りにできた家々にあたります。
 洪水は渋滞にあたります。
 そして、決壊はバイパスにあたります。

この話は大きなインパクトを与えました。
 一方を考えることで、もう一方を説明できるということがわかったのです。

川	道	血管	木の枝や根	フラクタル構造
運搬作用	→ 車による運搬	→ 血液の運搬	→ ()	→ ()
堆積作用	→ 物流の堆積=町	→ ()	→ ()	→ ()
侵食作用	→ 資源の侵食	→ ()	→ ()	→ ()

これは、血管にもあてはまります。
 あてはまらないこともあります。
 でも、そのことによって、かえってそのコトの特徴が鮮やかに浮かび上がります。

この対応は、やがて「フラクタル構造」につながり、分岐の仕方を数量化することができました。

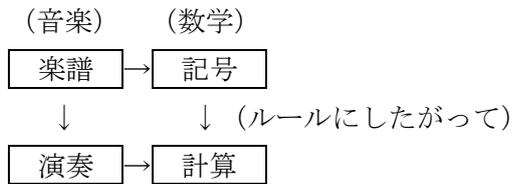
例 3 自分が何をやっているのか考える時に役立ちます。

【音楽と数学】

音楽の楽譜を見ると、記号で書かれています。
 この記号は、本のように読むものではありません。
 この記号は演奏されるための命令なのです。
 命令というと強く聞こえますが、柔らかくいえばルールです。
 ルールにしたがって演奏をすることを楽譜は示しています。
 一方、数学も記号があります。
 そして、この記号にはルールがあり、そのルール通り計算や演算を進めることを要求しています。

発問 3-4 では、音楽の演奏は、数学では何にあたるのでしょうか？

図式を描いてみましょう。
自然と浮かんできますね。



こう考えると、演奏の技術を高めることは計算の技術を高めることと対応します。
また、どうやって楽譜にするのかと考えると、それに対応したものを指し示します。
このように、対応図式（ダイアグラム）は、今何をやるべきなのか、何をやっているのか指し示してくれれます。

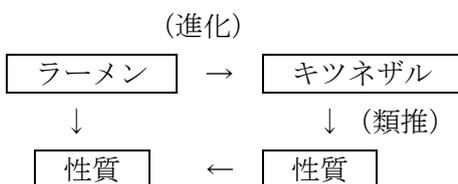
例4 モノゴトを結びつける時に役立ちます。

これは、意味を見つけることに当たります。
できるだけ異なったものと結びついた時に、面白さが出てきます。

【ラーメンとキツネザル】

ラーメンとキツネザルが同じであるということが発見した人がいました。
ラーメンは中国大陸から伝わり、日本で独自に多様に発展してきました。
キツネザルもアフリカ大陸から渡り、マダガスカルで独自に進化してきました。
キツネザルもマダガスカルに30種類ぐらいいるそうです。
でも、最初大陸から渡ってきたサルは一種だったそうです。
ラーメンはどうでしょうか。
絶滅したキツネザルの化石が発掘されるそうです。絶滅したラーメンもあるのでしょうか。

発問3-5 ラーメンとキツネザルはどこが対応しているのでしょうか？



進化というメガネで見ると、ラーメンとキツネザルは同じになります。
そして、この同一性からお互いを考察することもできます。
そうすると、異なったコトやモノの間にどのような類似点を見つけるかということが大事なことになります。
問いは、そういう時にポイントを指し示します。
世界は本来多様なのですが、それを認めた上で同一性を見つけるからこそ、面白さが出てくるのではな

いでしょうか。

発問3-6 対応がただけで同じものとみなしてもいいのですか？

フランスの数学者ポアンカレは次のように言っています。

「数学とは異なるものを同じものとみなす技術・アートである。」

同じものとみなすのが数学です。

数学は違ったものの間に、同じ構造を見つけ出すのです。

でも、同じことは違うことの意味も考えさせます。

例えば、差別は同じものを違うものと考えます。

そして、同一性は毎日変わっている自分自身を同じものと見なします。

これから、「同じ」と「違い」を考えてみましょう。

【ものがたり4】 醜いアヒルの仔の定理

■同じモノなのに違う

ここに百円玉が2枚あります。

百円玉はどの百円玉でも同じように使えます。使えなかったらそれは偽物です。だから、私たちはどの百円玉でも同じものと思っています。

ところが、この2枚の百円玉をよく見ると、違いが見つかります。製造年号も違います。傷がついているところも違います。重さだって細かく測れば違うはずですが。とすると、同じものにも差異があるということになります。

でも、私たちはどんな百円玉でも同じものと考えて買い物をします。違いを考えていたら安心して買い物なんかできません。私たちの脳には、違うものなのに同じものとみなす働きがあるようです。

■違うものなのに同じ（ところがある）

発問3-7 次のモノは違うものでしょうか？

A.ガラスのコップ B.金属のコップ C.紙コップ D.紙で折ったコップ

ここにあるのは、どれもコップです。これらは同じモノと思えますか？

これらは材質も、形も、重さも違います。水を入れて熱してみるとさらに違いが出てきます。ところが、こんなに材質が違うのに、同じもの（コップ）と考えてしまいます。

液体を入れる「コップ」の働きをするという意味では同じものなのです。どうやら、私たちの脳には、これらのまったく違ったものを同じものとみなしてしまう機能があるようなのです。…【同一性の原理】

私たち自身は日々変化しています。細胞を構成する原子も違うし、脳も日々変化しています。だから、もし自己同一性がないと、朝起きたときに自分自身を違うものだと認識してしまうことになります。そ

うすると大変です。違うものを同じものとみなすことは、私たちの生存にとって大事なことなのでしょう。

この違うモノを同じモノと考える「ちから」は、世界の多種多様な生き物たちが同じ生き物から進化したということを発見します。科学は、違うモノの間に同一性を発見することと言えます。

発問 3-8 では、違うモノの間に類似点はどれくらいあるのでしょうか？

■モノとモノの間には、違いも同じ点も同じだけある

あるモノとあるモノは、類似点の数だけで似ているか似ていないかを定めることはできないということが証明されています。…【醜いアヒルの仔の定理】

つまり、まったく違うものと思われるモノの間にも類似点はいくらかでも見つけることができるのです。例えば、「この魚」と「ここにある木の椅子」の間にどれくらい類似点があるのでしょうか。

同じ家の中にある。もとは生きていた。私が持っている。人の役に立つ。…

これくらいしかないと考えてしまいます。でも、見方を変えると、意外な類似点が出てきます。

この二つは金属ではない。コップではない。人間ではない。アヒルではない。…

という点において同じなのです。

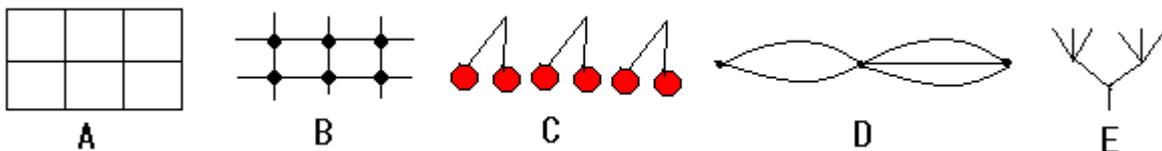
とすると、どんなに異なるように思えるモノの間にも、類似点を見つけていくことができることとなります。

発問 3-9 例えは？

■異なるモノなのに構造が同じ

数学は、違うものの中に同一性を見つけることを重視します。これができる人は数学の得意な人です。

下の図は一見違うモノのように見えますが、全て $2 \times 3 = 6$ を表しています。



Aは面積、Bは交点の数、Cはさくらんぼの数、Dは左から右へ行く道順の数、Eは樹形図の枝の数。これらは全て 2×3 です。

この場合の同一性は、今までの例と比べると認識するのがやや困難です。それは、性質というよりは構造を問題にしているからです。形や性質だけでなく「働き」をも認識の対象にする点は、さっきのコップと同じことです。

■差別と多様性と同一性

これまで、違うモノの中に類似性や同一性を見いだすことが、数学では重要であると説明してきまし

た。ところが、私たちは同じ人間なのに差別をすることがあります。他の民族を差別したり、男女差別や学歴差別などをするのです。違うものを同じとみなせる「ちから」を持っているのに、同じものを違うとみなすこともしてしまうのです。同じモノの中に差異を見つけ出してしてしまうのです。

発問3-10 同じコトなのに、どうして違うと思うのでしょうか？

「醜いアヒルの仔の定理」から言うと、差異と類似点は同じだけあることになります。ですから、私たちに、さっきの百円玉のように、同じものなのに差異を見つけることができってしまうのです。（これは私たちの煩惱と言ってもいいかもしれません。）

もちろん、その差異が値打ちのあるものであるのかどうかはしっかりと考えなくてははいけません。傷があろうと無かろうとも百円玉の値打ちには変わりはないのです。逆に差異化は多様性を生み出します。そして、「みんなちがってみんないい」となります。

ところで、私たちは、『違うモノを同じモノと見ているのか』、『同じモノを違うモノと見ているのか』、どちらなのでしょう。私は後者のような気がするのですが。

多様性は進化の働きです。私たちが、多様性の中で生きてると実感できるのは、同一性が一方にあるからのように感じます。

ちょっと難しくなってきましたね。
頭をほぐすために、これから脳のトレーニングをしてみましょう。
そんなに身構えなくても簡単です。
読みながら考え、考えながら読んでいだけですから。

【トレーニング1】 アナロジー・トレーニング

発問3-11 「魚」と「机」の類似点は何でしょうか？

S: エー、魚と机？ 類似点なんてあるの？

T: ありますよ。最低でも5つぐらいは見つけてよ。

S: (1)どちらも浮く。(2)どちらも地球上にある。(3)どちらも生き物だった。

S: もうないよ。まだあるの？

T: (4)どちらも猫ではない。(5)どちらも犬ではない。

S: そんなのインチキだ。

T: でも、どちらも猫ではないという点は同じだろ。

S: そりゃそうだけど、そうやって考えれば、類似点なんていくらでもあるよ。

T: 実は、「醜いアヒルの仔の定理」の証明もこの考え方を使っているんだ。では、今度は相違点を考えてみよう。

S: 魚は生き物で、机は生き物ではない。

S: 魚は食べられるけど、机は食べられない。

S: 色が違う。形が違う。名前が違う。・・・

S: いっぱいあるよ。

T: ということは、魚と机の類似点もたくさんあるし、相違点もたくさんあるということだね。この証明は、比較分類する観点を、この例(食べ物・食べ物でない・猫である・猫でない・食べ物であって猫である・食べ物であって猫でない・食べ物でなくて猫である・・・) の様に出すと、魚と机の類似点も相違点も同じだけあるということが示せるんだ。

S: 表にすると良くわかるな。

T: 結局、この定理から、類似点の数の多さでモノゴトを分類することはできないということがわかる。

S: つまり、二つのものを取り出したとき、類似点も相違点も同じだけあるということですね。

T: ところが、私たちは類似点の方をより注目する。これは類似点によって、モノやコトの値打ちをはかっているということだ。例えば、この魚は2000円だったとする。机も2000円とすると、二つのものはお金を媒介にして同じものといってもいいよね。

S: 値段が同じものは交換することができるから、同じとみなしてもいいよ。

S: 似ている、似ていないは、何を基に比較するかによって決まってくるということですね。

T: 人間は、違うモノを同じモノとみなしてしまう動物なんだ。実際にいるワンワン吠える動物を「犬」と名づけ、犬という言葉と「イヌ」という動物を同じものとみなしている。

S: その人の名前は、その人そのものだもんね。

S: 100円玉だってみんな違うけど、買い物をするときには同じだ。

私たちは無意識のうちに、違う物を同じものとみなしている

T: ところで、ここに電子が二つある。この二つの電子は区別がつくのだろうか

S: 二つあるのなら、区別がつくよ。

T: ところが、区別がつかないんだな。もし、区別がつかなら。違いを示すものがあるということだろ。ところが電子はそれ以上分けることができないものだから、違いがあるとしたらおかしい。だから、二つの電子は区別することができない。

S: 区別できないなら同じものなの。何だか変だな。

S: ある場所が違うんじゃないの。

発問 3-1 2 正方形と長方形は違う？同じ？

S: 正方形と長方形は違うものでしょ。

T: 正方形は長方形の一種だよ。

S: 違うよ。だって、長方形は縦と横の長さが違う。

T: だからさ、その長さが同じ長方形を正方形と言うんだろ。

S: 長さが同じだったら、長方形じゃないよ。

T: だから、縦と横の長さが同じ長方形を正方形と言うんだ。

S: そんなのおかしいよ。



T: それじゃここで長方形の定義を考えてみよう。つまり長方形とは何かということだな。
S: 長方形って角度が同じ四角形だよ。
T: では、正方形は角度が同じ四角形ではないの？
S: あれ？同じだな。じゃ、正方形の定義は何なの？
T: 角度が同じで、辺が同じ四角形だろ。
S: そうか。正方形は辺の長さが同じ長方形ということか。
S: では長方形は平行四辺形ということ？
T: そうだよ。平行四辺形の定義は？
S: えーっと、向かい合う辺が平行。長方形も、向かい合う辺が平行だから平行四辺形か。
T: こうやって考えると、正方形も長方形も名前は違うけど同じものと考えることができる。人間は違う名前を付けることによって、同じものを違うものとも考えることもしちゃうんだね。

発問 3-1 3 一次関数と正比例は違う？それとも同じ？

S: 違うよ。一次関数は原点を通らないし、 x が2倍になっても y は2倍にならない。
S: でも、正比例も一次関数も直線になるよ。
S: それに増え方が一定だ。
S: ということは、正比例は一次関数の特別な場合ということか。
S: $y = ax + b$ で $b = 0$ のときが正比例ということだな。
S: つまり、一次関数は正比例を拡張したものなんだな。
T: ぼくたちは、こうやって世界を拡張して行くんだよ。

「キジの一番（つが）いと、2日とが、ともに数2の例であることを発見するまでには、永い歳月がかかったであろう。」バートランド・ラッセル：数理哲学序説

発問 3-1 4 7と14は何が同じ？

T: 自然数を7でわったときに出てくるあまりの数で自然数を分類してみよう。
S: $9 \div 7 = 1 \dots 2$ で、 $16 \div 7 = 2 \dots 2$ だから、9と16を同じ仲間と考えるということですか。
T: そうですよ。そうすると、自然数は〔あまり0の仲間〕と、それぞれあまり1、2、3、4、5、6の仲間の7つに分類されることになる。
S: それで？
T: この仲間の間で足し算をしてみよう。例えば〔あまり2の仲間〕 + 〔あまり3の仲間〕 = いくつになる？
S: エーと、例えば $9 + 10 = 19$ だから、7でわると、2あまり5だ。ということは〔あまり5の仲間〕だね。
S: そんなの当然だよ。 $2 + 3 = 5$ だろ。
S: ということは、あまりの仲間同士で足し算や引き算ができるということか。
S: あれ？これはカレンダーの曜日と似ているよ。
S: そういえば、7日が月曜日なら14日も月曜日だもんね。

S: 7と14を同じものと考えるということだね。

T: 7で割ってあまりが0の仲間をひとまとめにして[0]と名づけ、同様に[1][2][3][4][5][6][7]とすると、8つの新しい数の世界が出来る。この新しい数の世界でも四則計算が成り立つ。

S: でも、これが何の役に立つの？

T: いろいろ役に立つけど、身近な例ではインターネットで暗号(RSA暗号)を作るところでも使われている。この方法を見つけ出した人は相当儲けたんじゃないかな。

T: そうすると、私たちにとって、全く違うものの間に類似性を見つけ出していくことが重要なことになる。

S: それが数学ということなの。

T: 数学だけでないよ。「発明・発見」だって、違うものの間に類似性を見つけることと言ってもいいくらいなんだ。そして、このことは世界のことが「わかる」コトにもつながる。だから、いつも「類似性」を見つけるトレーニング(アナロジー・トレーニング)をするんだ。これは発見のトレーニングにもなる。

発問3-15 $10\text{kg} \times 100\text{m} = 5\text{kg} \times 200\text{m}$ は、何が違うの？

T: この等式はわかる？これがわかれば、君たちは立派に思春期を迎えている。

S: どんな式なの？

T: 「 $10\text{kg} \times 100\text{m} = 5\text{kg} \times 200\text{m}$ 」という式だ。

S: 重さ×距離ということだね。

S: 10kg の物を 100m 運ぶのも、 5kg の物を 200m 運ぶのも一緒ということか。

S: そういえばそうだな。

T: みんなが同じだけ進まなければ平等じゃないと考えている人にとっては、この等式は成り立たないよね。でも、人はそれぞれ持っている物の重さが違うよね。だから、「ぼくたちは 200m 進むけど、君は 100m でもいいよ。」と言えるのはすごいことだと思わないかい。

発問3-16 「醜いアヒルの仔の定理」の意味は何ですか？

「醜いアヒルの仔の定理」は、モノゴトの間には、同一性も差異性も同じだけあるということを示しています。ですから、モノゴトの間には、そんなに違いがあるわけではないということを示しています。わたしたちが、モノゴトを分類しているのは、ある価値基準でやっているだけであって、その価値基準は絶対的なものではありません。

その価値基準を新しいものにするというのが、この本のテーマです。言い換えると、この定理は、どんなに違っていても、同じ所を見つけ出せるということを示しています。

だから、あるモノと、とても離れた意外なモノとを比べることができます。そして、新しい意味(=世界)が立ち上がってきます。

《まとめ》

対応図式 → 対応 → 同一性と差異性 → 醜いアヒルの仔の定理 → アナロジー・トレーニング