第７章　正負の数とモデル・・・わかるとはどういうことか

これまでいろいろな説明をしてきました。
説明した後に、「わかりましたか？」と聞きます。
「わかった！」という時はどんな時でしょうか。

発問７-１ 「わかる」ということは、どういうことなのでしょうか？

前に、「例え」を使うとよくわかるということを体験しました。
「例え」を使うと、なぜわかるのでしょうか。
それは、例えたものがよくわかっているものだからです。
よくわかっていることだから、その対比でわかるのです。
とすると、これはわかるということの意味を指し示しています。

理解はわかっていることと結びついた時に成立します。
この結びつきを示すためには、対応図式が有効性です。

わからないこと	→	わかっていること
↓		↓
理解（なるほど）	←	あてはまった

このことをさらに掘り下げるために、正の数と負の数を例としてとりあげます。

【ものがたり９】　「正負の数から学ぶ世界の成り立ち」

私：大学生でも分数の計算ができない人が少なからずいるらしいですね．
K：そういう題の本が出ているようですね．本当でしょうか？
私：本当のようですね．そのような話題は，大学の先生や高校の先生の間ではよく話題になります．
K：中学生ならともかく，大学生で分数がわからないなんてなんと嘆かわしい．いまどきの若い人は…
私：まぁまぁそういわずに，子どもたちだけのせいではないと思いますよ．分数のかけ算や割り算の概念は，子どもたちには難しいものです．
K：いやいや，そんなに難しい概念ではないですよ．
私：では質問です．中学校で最初に負の数というのをやりますよね。マイナス（負の数）同士のかけ算がプラス（正の数）になるという事を簡単に説明してください．
K：え！？　それは私への質問ですか？？
私：子どもに質問されたとして説明してください．

発問７-２ （マイナス数）かける（マイナス数）は（プラス）？　どうして？？

Ｋ：　う～ん．よく考えると不思議ですね。
私：「それが決まりだから覚えてしまえ。」なんて言ったら父親の威信は失墜しますよ。
Ｋ：そうなんですよ。でも、－と 90°回転した－が合体して＋になると教えてくれたのは先生じゃなかったですか。
私：おっと、そんなこともあったっけ。
Ｋ：ところで、世の中にはマイナスの数って実際にあるんですかね。例えば、マイナス１ｍって無いでしょう。

発問７-３ マイナスの数とはどんな数？　　－１ｍはあるの？

私：なかなか鋭い所を突いてきますね。それまで無いと思われていたものを作り出したということが数学のすごい所なんです。
Ｋ：無いものを作り出すのはインチキじゃあないですか。数学はインチキなんですか。
私：そもそも携帯電話だって初めは無かったでしょう。それを作り出したことがインチキと言えば、携帯電話もインチキですよ。
Ｋ：そういえば、銀行ではマイナスの数は当然のように扱っていますね。－10 万円の貯金は、10 万円の借金ですね。コンピュータ処理の関係で、マイナスを使うと便利なんでしょう。
私：マイナスの数が発見される前は、一万円持っていて、何か買い物をする時、お金が無くなるとそれで終わり。でも、ある時、どうしても欲しい物があった。所がそれは２万円もして、１万円足りない。そこで１万円を出して、後の１万円は貸して欲しいと言った。彼には信用があって、その要望は受け入れられた。商品は手元にあるが、彼は１万円を払わなくてはいけない。この１万円はなくなるお金。
Ｋ：この段階では、まだマイナスのお金ではないですよね。やがて無くなるけど、あくまでお金は手元にあります。
私：そうだね。手元にお金がある限り、マイナスの数は自覚されない。手元にお金が無くなって初めて、１万円の借りがあるということでマイナスが自覚される。

発問７-４ なぜ、プラスとマイナスがあるの？

Ｋ：でも、この借金から－１万円までの道のりは遠いような気がしますよ。
私：借金は貯金の反対と言うように、ものごとを正反に分けてとらえる見方が必要だよ。
Ｋ：大体私たちは、高低、左右、上下、善悪、良否、真偽、正邪、正負…と言う様に対立するように見ていますよね。これは正しい見方なんでしょうか。
私：これまた鋭い問いですね。私たちはものごとを二元論で見る癖があります。そして、それにとらわれて差別をします。でも、マイナスの数はこれを相対化します。どこかに原点を置いてそれよりも高いか低いか。右か左かをマイナスの数を使って表したのです。
Ｋ：なるほど、どこを原点にするのかで違ってくると言うことですね。温度のマイナスもどこを０にするのかで違ってくるし、善悪も同じですよね。そうか、だから借金も貯金も同じ数として扱うんだな。ところで、私たちはなぜ二元論で見てしまうのですか？
私：もしかしたら、世界がプラスとマイナスからできているからじゃないかな。
Ｋ：ところで、借金×借金＝貯金なんて、おかしいですよ。

発問７-５
借金×借金＝貯金？？？

私：そうですね。このことはおいおいわかってきますよ。とにかくマイナスの数だけでこれだけいろいろ考えられるのですから、世界は「正負の数から成り立っている」といっていいかもしれませんね。
では、正負の世界を説明してみましょう。

発問７-６
この場合の説明も、何かに例えるのですか？

「例える」場合に、その例えたものがよくわかっているものでないと説明にはなりません。
わからないものに例えてもわかりません。そこで、よく分っているモノやコトに例えます。
でも、「例え」がずれていることもありますから気をつけましょう。
この場合、負の数を何に例えるのかが大事なことになります。

正・負の数とモデルの図式

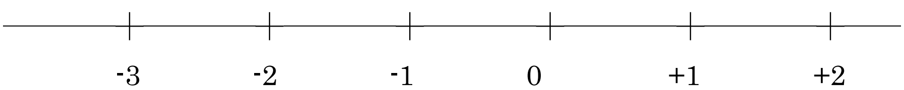
正・負の数 → 温度計 → 数直線
↓ ↓ ↓
負の数 → 零下 → ０より左

【ものがたり１０】　モデルで考えよう

『温度計から数直線モデルへ』
今日はまず温度計をモデルにします。この温度計モデルの仕組みを調べましょう。
現在の温度が１８度。だんだん寒くなっていくとどうなるかな。
--下へ下がっていきます。

０度よりも寒くなると？
--マイナスになります。

では、実際に温度計の目盛りを図に書き込んでみて下さい。（作業）
これとおなじようなものが他にもあります。例えば温度計や電流計などのように、何かを基準にして上か下かを決める時に使われます。そこで、温度計や電流計をモデルして数学モデルを作ります。それが数直線です。
--マイナスのついたメモリだね。
--０から右は定規だよ。



こういうように、右にも左にも広がっているものはまだ他にもあるね。
--貯金と借金。

--貯金がプラスで借金がマイナス。貯金が減っていくと０になり、更に減ると借金になるね。
--前と後ろ
--歴史年表

こうやってモデルを作るとよりよくわかりますね。
モデルはいろいろあります。
ここでは、次の計算とつなげるために、トランプをモデルとして選びます。

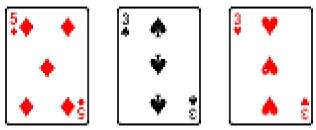
> 発問７‐７
> なぜトランプをモデルとして選んだのですか？

モデルと対応させる時に大切なことは、そのモデル自体の構造です。
構造とはしくみです。
「正負の数の世界」でいうと、計算のしくみです。
今までわかったように「正負の数の世界」は対称構造になっています。
この対称構造は、例えば次のように表わされます。

プラス─マイナス　　これらは対になっています。
｜　　　｜
たす─ひく
｜　　　｜
かける─わる

ご存知のようにトランプは、赤と黒の対称になっています。
この対称構造を使って対応図式ができます。

正負の数　→　トランプ
↓　　　　　　↓
負の数　　→　赤いカード



この図式は、構造も対応させているのでしょうか。

【ものがたり１１】　赤と黒のゲームの世界（モデル）

『取られると得で、もらうと損？』
さあ、今日はトランプで赤と黒のゲームをやるよ。負けたら痛いで。このゲームでは、このことが分からんと負ける。それは「取られると得で、もらうと損」ということや。普通は「取られると損、もらうと得」やけどその逆の世界もある。それを早く見つけた人が、きっと勝つだろう。　ルールはババ抜きと一緒。カードは１から人数分の数字までのカードを使う。ババは０とする。黒の数のカードは得点。赤のカードは減点。自分が一番得点が多いと思ったら「ストップ」をかける。ただし、一周してからで

ないと「ストップ」はかけられない。一番勝った人がしっぺができる。勝った順に手を重ねる。 さあ、やってみよう。
--やったー。
--おもしろい。

マイナス２とマイナス３ではどっちが上なの?
--そりゃ、マイナス３が上です。

どう？「取られると得でもらうと損」ということはわかった？
--わかった！わかった！

発問７‐８ このゲームは、正負の数の計算と対応しているの？

（数学的現象）		（モデル）
正負の数	→	トランプゲーム
↓		↓
正負の数の計算	→	ゲームのルール

【ものがたり１２】　正負の数の計算モデル

この赤と黒のゲームをモデルにして正・負の数の世界をつくるよ。
まず、次のように置き換えよう。

持ってくる	←→	＋　足す
取られる	←→	－　引く
減点	←→	マイナス
得点	←→	プラス

こうすると、赤の３を持ってくるという事は＋（＋３）と数式で表せる。
自分が黒の３を持っている時に、赤の３を持ってきたら？
--（＋３）＋（－３）で差し引き０です。

では、（－２）＋（－３）は?
--赤同士はたすから、マイナス５です。

こうやっていくと、赤と黒のゲームは全部式で表すことができますね。 そして負の数にも足し算や引き算を当てはめることができます。 さて、ここで（＋２）－（－３）＝はどうなるかを説明してみましょう。
--（－３）は赤の３だから、赤の３を引くと言うことは赤の３を取られるわけだから自分にとっては得で、黒の３をもらうと同じです。
--（＋３）と（－３）でゼロでしょう。だから、（＋２）＋（＋３）＋（－３）－（－３）とやっても同

じわけ。 で、これは結局（－３）－（－３）＝０が消えて（＋２）＋（＋３）と同じになります。

これで、トランプゲームの世界と正負の数の世界の構造が対応しました。
次は計算練習です。
計算のトレーニングをやっているうちに、正負の数そのものがだんだん自分のものになって行き、やがて、これが新しいモデルになります。
そうなると、今度は「のぼりおり」の下りです。

（数学的モデル）		（現象）
正負の数	→	（　　　　）
↓		↓
正負の数の計算	→	（　　　　）
	（あてはめ）	

では、いろいろな事象にあてはめてみましょう。

【ものがたり１３】　正負の数で表現できる世界

発問７-９
キャッシュカードでマイナスの貯金とは？

　このように、正・負の数の世界でも足し算や引き算が同じようにできます。　さて、この数の世界をモデルにしていろいろなモデルを考えることができます。
例えば、貯金がマイナス１０万円というと?
--借金が１０万円ということだ。貯金が＋、借金が－。

キャッシュカードなんか使いすぎるとマイナスになることがあるんですよ。
--そういうときはどうなるの?

マイナスのお金に３％の利息がつくと（－１０００００）×０．０３＝（－３０００）となり、もらえる利息ではなく３０００円払わなければいけなくなる。これが重なるとカード破産ということになるね。
他にも、電気のプラスとマイナス。磁石のＳとＮ。男と女・・・＋－の世界はいろいろありますね。

発問７-１０
散歩で、前へマイナス１０歩進むと？

タートルが前へマイナス１０進むとどうなる？
--「前へ」がプラスで、－１０進むのは１０もどるに起きかえると、

「前へ」 ←→	＋（プラス）	「進む」 ←→	＋（たす）
「後ろへ」←→	－（マイナス）	「もどる」←→	－（ひく）

--つまり、後ろへ１０すすみます。

では、タートルが後ろへマイナス１０進む（１０もどる)という命令を与えるとどうなるかな?
--後ろの方へ向かって１０もどるわけだから、前へ１０進みます。
--このロゴの世界も正・負の数と同じわけか。
--　－（－１０)という数学の式はいろいろ翻訳できるわけですね。

というように、正負の数の世界がいろいろな拡がりを見せます。
ところで、前にやったように、こういう対応構造は新しいことも予測してくれます。

(数学的現象)		(モデル)
正負の数	→	トランプゲーム
↓		↓
正負の数の計算	→	ゲームのルール
かけ算		(　　　　)

> 発問７-１１
> モデルでは、かけ算はどう表現されるのでしょうか？

【ものがたり１４】　一方の世界からもう一方の世界を予測する

足し算・引き算はわかったけど、掛け算・割り算はどうだろう。
--　（－３）×（＋２）＝（－６)です。
--　（＋３）×（－２）＝（－６)じゃないかな。

では、(－３）×（－２）＝はどうなると思いますか。
まず、正負の数の世界では（－）×（－）はどうなるのか考えて見よう。

--　＋３×（－２）＝－６
--　＋２×（－２）＝－４
--　＋１×（－２）＝－２
--　　０×（－２）＝　０　だから、２ずつ増えているから次は
--　－１×（－２）＝＋２
--　－２×（－２）＝＋４
--　－３×（－２）＝＋６　　とこうなるんじゃないかなあ。

では、この予想を赤と黒のゲームの世界に当てはめてみると？
--　たとえば掛け算を
×N　←→　「同じ数をＮ回持ってくる」
÷N　←→　「ある数をＮ等分して持ってくる」　と考えると
マイナスをかける　←→　「同じ数をＮ回取られる」　ということになる。
--だから、(－３）×（－２）は赤の３を２回取られるわけだから、結局得なわけだ。

--マイナス×マイナスはプラスになるのか。

これは、電気や磁気の世界でもなりたっていることだよ。
例えば、電気の斥力をプラス、引力をマイナスとすると、
$\boxed{(+)\times(+)=(+)}$ $\boxed{(+)\times(-)=(-)}$ $\boxed{(-)\times(+)=(-)}$ $\boxed{(-)\times(-)=(+)}$
つまりプラス同士もマイナス同士も斥力が生じるのです。
--一方の世界で成り立つことは、もう一方の世界でも成り立つわけか。

このように、正負の数はモデルとしてかなりの表現力をもっています。
物理や化学ばかりでなく、様々なところに応用ができることがわかります。
ところで、今まではモデルを用いて、他方の構造を対応させてその構造を探っていくという方法をとってきました。

発問７-１２ 負の数が持っている法則だけから、こういった計算の法則を導くことができるのでしょうか？

この場合は証明という手法を使います。

【ものがたり１５】 $\boxed{1-(-1)=2}$ の証明

以前、メールでこんな質問をしてきた人がいたよ。みんなだったらどう答える？

「大変楽しく見させて貰っています。この HP を見るきっかけになったのが、私の彼女が「１－（－１）＝２」はなぜ答えが「２」になるのか小学生の頃から分からないと言う話からです。その後、なぜ「０」が存在するのか？から、なぜ「マイナス」の世界が必要なのかという話しになっていきました。もっと進んで、宇宙に終わりがあるのか？という話まで様々です。さて、一つ教えていただきたいのですが、上に書いたように、なぜ、「１－（－１）＝２」が成り立つのか教えていただきますでしょうか？理系の方にとっては当たり前のことかもしれませんが、文系なので分かりません。これからも楽しみにしてます。頑張って下さい。」

--トランプのゲームで説明したらわかるよ。赤の１を引かれるんだから自分にとってはプラスだよ。

うん、そうだね。トランプでの説明はわかりやすいけど、これは例え（モデル）であって証明ではないんだよね。
--こんなことを証明できるの？

これを数学的に証明しようとすると、とても大変なのです。
まず、１＋（－１）＝０　はよろしいでしょうか？
０も定義しなければならないのですが省略。
それから、（－１）－（－１）＝０　これは同じものから同じものを引けば０になるという法則から来

ています。
さて、この２つの式をたします。たしても０です。

１＋（－１）＋（－１）－（－１）＝０

（－１）＋（－１）＝－２	と定義します。
１＋（－２）－（－１）＝０	両辺に２をたします。
１＋（－２）－（－１）＋２＝０＋２	交換法則を使って、
１－（－１）＋２＋（－２）＝２	２＋（－２）＝０だから、
１－（－１）＝２	証明終わりです。

--なんだかすっきりしないなあ。
--つまり、１＋（－１）＝０と（－１）－（－１）＝０を前提にすると証明できるんですね。
--では、(－１）×（－１）＝１は、同じように証明できるんですか？

> 発問７-１３
> －１×（－１）＝１　は、証明できるの？

やってみましょう。

（－１）×１＝－１	(ⅰ)	１をかけても変わらない。
１×（－１）＝－１	(ⅱ)	交換法則。
－１÷（－１）＝１	(ⅲ)	同じ数を同じ数でわれば１となる。
－１×１÷（－１）＝－１÷（－１）		(ⅰ)の両辺を（－１）でわると、
－１×（１÷（－１））＝１		右辺は１になる。

--１÷（－１）は－１だから　－１×（－１）＝１といえるよ。
--１÷（－１）＝－１はどうして言えるの？

そうだね。１÷（－１）＝－１は証明されていないね。実はこれは証明できないんですよ。
--証明できないのだったら正しいかどうかわからないのじゃないですか？

足し算の時は、１＋（－１）＝０と定義しました。かけ算でも－１×（　　）＝１になる（　　）として－１を定義する必要があるのです。上の証明で言うと、１÷（－１）＝－１と定義しないとだめなのです。そしてこのことは、－１×（－１）＝１と同じことなのです。
--先生、それを定義しなくても分配法則を使えば証明できますよ。

えっ！どうやってやるの？
--０＝（－１）×０＝（－１）×（１＋（－１））
　　＝－１×１＋（－１）×（－１）＝－１＋（－１）×（－１）
　　　この－１を左辺に移項して、
　１＝（－１）×（－１）。
--おーっ！！

『**捨て札ゲーム**』

発問７-１４ カードを捨ててもすてても決して無くならないってどういうこと？

このゲームは、まず３枚のトランプを配ります。そして数字のカードをめくり、その数のトランプを手元から場に捨てていって、一番持ち点が多い人が勝ちというものです。
--捨てていくだけなら、手元のトランプはすぐになくなるよ。

ところが、なぜか捨てても、捨ててもトランプはなくならないのだ。なぜかを考えてね。
（トランプは１～５までのカードを使う。残りのカードは場にひろげる。ジョーカーは０。）・・・
--＋２を捨てたいけど、手元にないよ。
--場にある＋２と－２を持ってきても０だから問題ないよ。それで、＋２を捨てればいい。
--わかった。＋２を捨てることは－２を持ってくることだし、－２を捨てることは＋２を持ってくることと同じだ。
--そうか。手元になかったら、場から持ってくることができる。それに０はどんな数にでもなる。
--どういうこと？　０は０だろ。
--０は＋２と－２にもなるし、＋５と－５にもなる。＋１００と－１００にだってなる。一億円得をする人がいれば一億円損する人もいる。
--無からどんな数でも生まれてくるみたいだね。

そうなんだ。正の数・負の数を使うと、０からどんな数でも生み出せるんだ。つまり、無からどんどん生み出せるということですよ。
--宇宙は無から誕生したという話を聞いたことがあるよ。

プラスとマイナスのものが対になって誕生したから、電気の＋と－や磁石のＳとＮや物質と反物質などがあるんだよ。
--それで、この世の中には対になったものが多いのか。
--目は二つ、耳も手も足も肺も二つだよ。
--口は一つだよ。どうして口は一つなの？
--鼻も一つだよ。
--鼻の穴は二つだよ。
--口が二つあったら、どっちで喋ったら良いのかわからなくなるからだ。

動物の体は左右対称になっているから、器官は大体二つある。ところで、動物の体を単純にすると、パイプのようなものだということはわかる？ここに目や耳や手をつける。そういったものは二つあるけど、口は穴だから一つなのだ。穴だから目や耳とは違うんだ。
--なるほど。口の中や腸は外につながっていますね。

ここで問題を出すよ。『空のバスが来ました。５人の乗客が乗りました。次のバス停で７人降りました。バスの中には何人残っていますか？』

--０＝２－２だから、（５＋０）－７＝（５＋２－２）－７＝（７－２）－７＝－２。マイナス２人残っています。
--幽霊バスだ。
--反粒子の人間が残っているんだ。

発問７-１５ この幽霊バスの話は、現実にはありえないのでしょうか？

バスの乗客	→	正負の数
↓		↓
？	←	－５

これは、計算では解が出るけれど、現実の現象に当てはまるものが無いと考えます。
しかし、これは矛盾ではなく、現実をある程度表現していると考えて想像力を使います。
数学の応用はこのようになされます。
例えば、陽電子などはこういう発想から発見されました。

身近な例の中でもあります。
温度と音速の関係には、
　　　温度ｔ　→　音の速さ（m／秒）＝０．６ｔ＋３３１
という関係があります。
ここで、ｔ＝－５５０度を代入します。
すると、音の速さ（m／秒）＝０．６×（－５５０）＋３３１＝1（m／秒）
音の速さが秒速１mになり、音が凍ることも予測できます。
でも、これは間違っています。そもそも－５５０度はありえないし、この法則がどの温度でも成立するのかはわかっていないのです。そうだとしても、この予測は面白いと思いませんか。

１／２の人はいないけど、１／２のケーキはある。 －１mの長さはないけれど、－１円の貯金はある。

想像の翼は、私たちを豊かな世界に連れていってくれます。
「**抽象の山**」へ登ると素晴らしい眺めがあり、「**具象の海**」を潜ると多様な生き物や現象があるのです。

まとめ・・・**「例え」の三つの働き**

説明は「例え」を使うと、よくわかります。
つまり、
「例え」の構造は、説明の構造であり、理解の構造なのです。
まとめると「例え」には三つの働きがあります。

(1)数学的対象を個別化する

（個別化）

$\boxed{\text{数学的対象}} \rightarrow \boxed{\text{具体化}}$

↓　↓

$\boxed{\text{法則・定理・命題}} \rightarrow \boxed{\text{応用}}$

（あてはめる）

(2)数学的対象を同型なものにおきかえる

（同型・同値）

$\boxed{\text{数学的対象}} \rightarrow \boxed{\text{同型なモノ}}$

↓　↓

$\boxed{\text{現象・事象}} \rightarrow \boxed{\text{例}}$

（たとえる）

(3)数学的対象をモデルにおきかえる

（同型対応）

$\boxed{\text{数学的対象}} \rightarrow \boxed{\text{モデル}}$（数タイル，トランプ，お金，数直線，ゲーム）

↓　↓

$\boxed{\text{現象・事象}} \rightarrow \boxed{\text{現象・事象}}$

（類推・変換・わかる）

(3)のモデルが数学的なものだと、数学的モデルといいます。
(2)の例は、「社会を理解するためには大貧民ゲームを行なうと理解できる」などです。
(1)は、国語でいう譬喩であり、数学では応用です。

発問７-１６ 「わかる」ためにはどうすればいいのでしょうか？

まず、自分が「わからない」ということをしっかりと自覚します。そして、次に、その「わからないこと」を、自分が「よく知っていること」におきかえるようにします。
そのためのトレーニングは必要ですが、「要するに？」という言葉を、いつも自分に問いかけていれば自然に身につきます。

◎数学理解の１つのモデル
「私たちは、『新しい概念』も、今まで持っている概念と関連づけている。」
「どんなことでも、自分の持っている内的モデルと同化させることができれば容易にできる。」
「我々は何かを知っている時、それを比喩的に知っている。」

シーモア・パパート