三角関数の展開

～　二項展開を使って三角関数を展開してみよう　～

○オイラーの見え方・・・テーラー展開を使わなくても展開できる！

複素数を三角関数表示する。

$cos(n\theta)+isin(n\theta)$　　　　[ド・モアブルの定理より]

$=(cos\theta+isin\theta)^n$　　　　[二項定理で無限級数に展開　n→∞]

$$=cos^n\theta+n\cdot cos^{(n-1)}\theta\cdot isin\theta-\frac{n(n-1)}{2!}cos^{(n-2)}\theta\cdot sin^2\theta-$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}cos^{(n-3)}\theta\cdot isin^3\theta+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}cos^{(n-4)}\theta\cdot sin^4\theta+\cdots$$

両辺の係数を比較すると、

$$cos(n\theta)=cos^n\theta-\frac{n(n-1)}{2!}cos^{(n-2)}\theta\cdot sin^2\theta+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}cos^{(n-4)}\theta\cdot sin^4\theta-\cdots$$

$$isin(n\theta)=n\cdot cos^{(n-1)}\theta\cdot isin\theta-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}cos^{(n-3)}\theta\cdot isin^3\theta+\cdots$$

ここで、$n\theta=x$ とおき、x を一定の値にしてθを無限に小さくすると、n は無限に大きくなる。

そうすると、$cos\theta\quad 1\qquad sin\theta\quad \theta=\frac{x}{n}$　　上の式をこれで置き換えると、

$cos(n\theta)=cosx$

$$=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}x^2+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\frac{1}{4\,!}x^4-\cdots\qquad\left[\frac{1}{n}\to 0\text{ だから}\right]$$

$$=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots$$

$sin(n\theta)=sinx$

$$=x-\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3\,!}x^3+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{4}{n}\right)\frac{1}{5!}x^5-\cdots$$

$$=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$$

テーラー展開を使う方法と比べてみよう。

$sinx=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots$とする（とできるとする）。

$x=0$ を代入すると、$a_0=0\quad\cdots(1)$

両辺を微分すると、$cosx=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$

$x=0$ を代入すると、$cos0=1=a_1\quad\cdots(2)$

この (1)(2) を繰り返すと、$sinx=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots$　と展開できる。

こうやって比べると、テーラー展開はとても便利なことがわかる。