パスカルの三角形（二項展開）から テーラー展開まで

上村文隆

2012 年 2 月 22 日

0.1　はじめに

H：複素関数の微分をやっていたら、面白いことに気がついたんだ。ベキ関数 $\mathrm{y} = x^a$ を微分すると、$y' = ax^{a-1}$ でしょう。この指数ａが、なんと複素数の範囲まで成り立っている。しかも、無限に微分することができるんだ。
S：ａがマイナスでも成り立つの？　分数でも？
H：そうだよ。
S：でも、x^i なんてどう考えればいいのかなぁ。
T：そのことはいつか説明しましょう。指数を正の数→負の数→分数→実数→複素数というように、成り立つ範囲を拡げていくというのが「数学の学習」ですから。
S：そうすれば、何か良いことがあるんですか？
T：拡がると視野が広くなるでしょう。そして、それまで見えなかったことが見えてきます。
H：それ、わかる。見えてくると、わからなかったことがわかる。だから、もっとやりたくなる。

0.2　多項式の展開

H：ところで、前に先生が話してくれた「パスカルの四角形」[*1]を見ていたら、気がついたことがある。
S：その「パスカルの四角形」から説明してよ。
H：パスカルの三角形をｎが負の場合まで拡げたんだ。
S：どうやって負の数の展開をしたの？
H：まず、$(1+x)^2$ の展開はかけ算で簡単にできる。

$(1+x)^{-1} = \dfrac{1}{1+x}$ の展開は、割り算を使えば、無限に割りきれないけど計算することはできる。

その結果を表にすると次のようになる。

[*1] このサイトでは、多項式を展開し、二項定理の公式を求めた。
http://www.rd.mmtr.or.jp/ bunryu/pascal.shtml

0.3　パスカルの四角形

$(1+x)^n =$	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	$\cdots$
$(1+x)^{-6} =$	1	-6	21	-56	126	-252	462	-792	$\cdots$
$(1+x)^{-5} =$	1	-5	15	-35	70	-126	210	-330	$\cdots$
$(1+x)^{-4} =$	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	$\cdots$
$(1+x)^{-3} =$	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	$\cdots$
$(1+x)^{-2} =$	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	$\cdots$
$(1+x)^{-1} =$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	$\cdots$
$(1+x)^{0} =$	1	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$(1+x)^{1} =$	1	1	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$(1+x)^{2} =$	1	2	1	0	0	0	0	0	$\cdots$
$(1+x)^{3} =$	1	3	3	1	0	0	0	0	$\cdots$
$(1+x)^{4} =$	1	4	6	4	1	0	0	0	$\cdots$
$(1+x)^{5} =$	1	5	10	10	5	1	0	0	$\cdots$
$(1+x)^{6} =$	1	6	15	20	15	6	1	0	$\cdots$
$(1+x)^{7} =$	1	7	21	35	35	21	7	1	$\cdots$
$(1+x)^{8} =$	1	8	28	56	70	56	28	8	1

0.4　二項定理の拡張

H：気がついたことは二項定理の公式は、ｎが負の数の場合にも成り立つということなんだ。
まず、二項定理でｎが正の場合、その公式は、

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}x^r+\cdots+x^n$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!(n-r)!}x^r$$

この公式がｎ＜０負の場合も

$$(1+x)^n = 1-nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}(-x)^r+\cdots$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{n!}{r!(n-r)!}x^r$$

違いは無限級数になったことだけど、まちがいなく同じなんだ。
S：でも、階乗に負の数をあてはめることができるの？
H：そこなんだ。悩んだ所は。実際に $n = -3$ としてあてはめてみよう。
例えば、$r = 3$ とするよ。

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 = \frac{(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)}{3\cdot 2}x^3 = -10x^3$$ となって表の値と一致する。

S：ということは $(-3)! = (-3)\cdot(-4)\cdot(-5)\cdot(-6)\cdots$ と無限に続くの？
H：そうです。$(n-r)! = (-3-3)! = (-6)!$ となって、上の $(-6)\cdot(-7)\cdot(-8)\cdot(-9)\cdots$ 以下が約分されるんだ。
T：面白い！しかも、これを使えば $n \geqq 0$ の場合も無限級数として表わせますよ。
H：どうしてですか？
T：$n=2$ の場合には、

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad \text{だから、}$$

$$1 + 2x + x^2 + \frac{2(2-1)(2-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{2(2-1)(2-2)\cdots(2-r+1)}{r!}x^r\cdots$$

S：確かに後ろの方は 0 になるね。
H：私は二項定理からｎが負の数の場合に拡張したけれど、その拡張された公式は元の二項定理も含んでいるということなのですね。こうなると、数や関数を無限ベキ級数で表わすことが可能ではないかと考えてしまうな。
T：実際にこの展開を使えば、いろいろな無限級数を作る事ができますよ。
H：まず、一番簡単そうな ｎ＝－１ の場合に、$x = -x$ とすれば、

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

S：より簡単になるね。次は、$x = \dfrac{1}{2}$ としてみよう。

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \quad \text{となるよ。}$$

これって、「ドラドラえもん」[*2]でやったよ。
H：でも、こんどは x がどんな値だったら無限級数の和が一定の値になるのかどうかという問題も出てきますね。
T：そこに注意して色々な数を代入すれば、数や関数を無限級数に展開できます。

0.5 自然対数

T：では、次に考えて欲しいのが、$x = \dfrac{x}{n}$ とした場合です。
H：やってみよう。

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}x^r \qquad \text{に} \quad x = \frac{x}{n} \text{を代入すると、}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}\left(\frac{x}{n}\right)^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots3\cdot2\cdot1}{r!\cdot(n-r)(n-r-1)\cdots3\cdot2\cdot1\cdot n^r}x^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n-1+1)(n-2+1)(n-3+1)\cdots(n-r+1)}{r!\cdot n^r}x^r$$

*2 8、本の話　http://www.rd.mmtr.or.jp/ bunryu/book1.shtml

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{n^r + a_1 n^{r-1} + a_2 n^{r-2} + \cdots + a_r}{r! \cdot n^r} x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r!} + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \cdots \right) x^r$$

そうか。ここでn→∞とすれば、n が分母にある項は０になるから、

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$$

T：この級数のすごい所は、展開された項を微分してみるとわかります。

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

H：この右辺を微分すると、

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$ あれ？同じだ。微分しても変わらない。

T：不思議な関数でしょう。これを e^x と書いて自然対数といいます。

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$ つまり、上の級数は、自然対数の展開になっているんだよ。

0.6 二項展開からベキ関数の展開へ

さて、もう一つ。今度は $x = x - 1$ を代入してみましょう。

$x^0 = 1$

$x^1 = 1 + 1(x-1)$

$x^2 = 1 + 2(x-1) + 1(x-1)^2$

$x^3 = 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + 1(x-1)^3$

$x^4 = 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + 1(x-1)^4$

$x^5 = 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + 1(x-1)^5$

S：不思議な式ですね。

H：これも展開の一種と言っても良いと思うけど、意味がわからない。

T：$1 \div (1+x)$ は計算することができましたね。では、１÷x はどうでしょう？

H：あれ？できない。なぜだろう。

T：同様に、$1 \div x^2$や x^2 はこれ以上展開できません。でも、$1 \div (1+x)^2$や $(1+x)^2$ なら展開できるのです。ということは、上の様にすれば、$1 \div x^2$や x^2 も展開できるということになりませんか。

S：何か例えで説明してもらえませんか？

T：では、例えば４を無限級数に展開してみましょう。使うのは、

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots$$ です。

ここで、$x = x - 1$ を代入すると、

$$\frac{1}{x^2} = 1 - 2(x-1) + 3(x-1)^2 - 4(x-1)^3 + 5(x-1)^4 - \cdots$$ となります。

つまり、$\dfrac{1}{x^2}$ が展開できたことになります。そしてさらに、$x=\dfrac{1}{2}$ を代入すると、

$$4=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\cdots$$ と展開できたことになります。

S：上の式は x^n を、1を中心として展開したことになるのですね。

T：そうです。さらに、拡張するために、パスカルの三角形を微分してみましょう。

0.7　二項展開は微分だ！

$(1+x)^n=$	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	$\cdots$
$((1+x)^{-3})'=$	-3	12	-30	60	-105	168	-252	$\cdots$	$\cdots$
$(1+x)^{-3}=$	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	$\cdots$
$((1+x)^{-2})'=$	-2	6	-12	20	-30	42	-56	72	$\cdots$
$(1+x)^{-2}=$	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	$\cdots$
$((1+x)^{-1})'=$	-1	2	-3	4	-5	6	-7	8	$\cdots$
$(1+x)^{-1}=$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	$\cdots$
$(1+x)^{0}=$	1	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$((1+x)^{1})'=$	1	0	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$(1+x)^{1}=$	1	1	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$((1+x)^{2})'=$	2	2	0	0	0	0	0	0	$\cdots$
$(1+x)^{2}=$	1	2	1	0	0	0	0	0	$\cdots$
$((1+x)^{3})'=$	3	6	3	0	0	0	0	0	$\cdots$
$(1+x)^{3}=$	1	3	3	1	0	0	0	0	$\cdots$
$((1+x)^{4})'=$	4	12	12	4	0	0	0	0	$\cdots$
$(1+x)^{4}=$	1	4	6	4	1	0	0	0	$\cdots$

T：何か気がつかない？

S：微分した係数を指数で割ってやると、上の級数と同じになります。

H：ということは、何回も微分するには、指数の階乗で割れば良いという事か。
　当然だ。例えば、$f(x)=x^5$　とすれば、

$$f'(x)=5x^4 \quad f''(x)=5\cdot 4x^3=20x^3 \quad f^{(n)}(x)=\frac{5!}{(5-n)!}x^{5-n}$$ だからね。

S：あっ！　ということは、パスカルの三角形（二項定理）は微分の式で表わすことができますよ。

$$f(x)=(x+1)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f''''(0)}{4!}x^4+\cdots \qquad (1)$$

H：こうなると、パスカルの三角形は微分も表わしていることになるね。右辺を微分したものは、上の式を指数倍したものになる。

S：結局、微分は割り算であり、積分はかけ算と同じなんだ。

0.8　テーラー展開へ

T：さて、こうなるとさっきの展開の恒等式も同じように考えられませんか？

S：そうか。係数が同じだから、

$f(x) = 1 + 5(x-1) + 10(x-1)^2 + 10(x-1)^3 + 5(x-1)^4 + 1(x-1)^5$ 　だから、

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f''''(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f'''''(1)}{5!}(x-1)^5 \tag{2}$$

(1) と (2) の違いは、代入する値が１か０かですね。

H：まだあるよ。(1) は $f(x+1) =$ だけど、(2) は $f(x)$ になっている。それに、二項定理を使っていないから、ベキ乗関数でなくても使えるかもしれない。

T：この１をａと置き換えて、さらに一般化することはできるのでしょうか。やってみましょう。

もし、無限に微分可能な関数が、$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ と書けるとすれば、

$f(0) = a_0$　，　$f'(0) = a_1$　，　$f''(0) = 2a_2$　$,\cdots,$　$f^{(r)}(0) = r!a_n$　したがって、

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdot\cdot\cdot$$

ここに、$x = x + a$ を代入して展開すると、

$$f(x+a) = f(0) + f'(0)(x+a) + \frac{f''(0)}{2!}(x+a)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x+a)^3 + \cdot\cdot\cdot$$

$$= f(0) + f'(0)x + f'(0)a + \frac{1}{2!}\left(f''(0)x^2 + 2f''(0)ax + f''(0)a^2\right)$$

$$+\frac{1}{3!}\left(f'''(0)x^3 + 3f'''(0)ax^2 + 3f'''(0)a^2x + f'''(0)a^3\right) + \frac{1}{4!}(\cdot\cdot\cdot) + \cdot\cdot\cdot$$

$$= \left(f(0) + f'(0)a + \frac{f''(0)}{2!}a^2 + \frac{f'''(0)}{3!}a^3 + \cdots\right) + \left(f'(0) + f''(0)a + \frac{f'''(0)}{2!}a^2 + \frac{f''''(0)}{3!}a^3 + \cdots\right)x$$

$$+\frac{1}{2!}\left(f''(0) + f'''(0)a + \frac{f''''(0)}{2!}a^2 + \frac{f'''''(0)}{3!}a^3 + \cdots\right)x^2 + \cdots$$

$$f(x+a) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \frac{f'''(a)}{3!}x^3 + \cdots \quad \text{と簡単になる。}$$

この式に、$x = x - a$ を代入すると、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

確かに一般化できました。これをテーラー展開といいます。二項展開を拡張したわけですから、二項展開もテーラー展開を使って行なうことができます。

H：これを使えば、指数関数や三角関数をベキ級数で表わすことができる。そして、ベキ関数の微分は指数を一つずつ減らしていくことだから、ベキ級数で表わせば微積分が簡単になる。

S：でも、指数が実数や複素数でも成り立つのかどうか調べる必要があるよ。そうか！それで最初のＨ君の話になるのか。