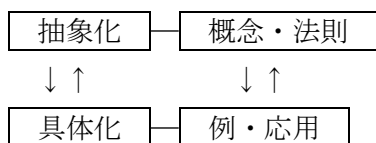


## 第9章 世界を拓げる・・・数学は「のぼりおり」する

抽象化と具体化の「のぼりおり」の図式（ダイアグラム）で表わします。



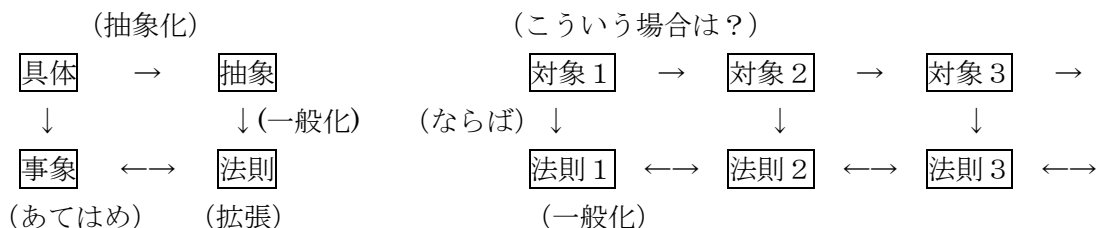
このように私たちは、具体的な現象から法則を見つけ、それを応用することで再び具体化することを常にやっています。

発問9-1

数学の特徴は抽象化と具体化だけですか？

数学の特徴は抽象化と具体化にありますが、もう一つ、「一般化」という働きがあります。抽象化したものを、さらに拓げていく働きです。

このことを対応図式で説明してみます。



この「一般化」は、新しい法則を見つけることにつながっていきます。

逆に、「具体化 (=あてはめ)」は、法則を応用することにあたります。

この一般化と具体化を「のぼりおり」と言い、一般化は世界を広げるので「拡張」と言います。

この「のぼりおり」の物語を紹介します。

使うキーワードは「～の場合は？」という合言葉です。

発問9-2

数学はどのように拡張されているのですか？

### 【ものがたり20】 数学は拓がっていく

(1) 図形の面積の求め方 (正方形→長方形→平行四辺形→三角形→台形→円)

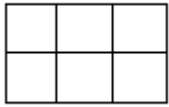
小学生3年生の弟がいたとするよ。その弟が、「何故、縦×横で面積がでるの」と聞いたらどう答える。

--「そうなってるからや。」と答える。

それでは、弟から馬鹿にされてしまうよ。こういう時は、うまい方法がある。それは、

「たとえば」を使う方法だ。例えば、縦が2 cmで、横が3 cmとすると。

--面積は  $2 \times 3 = 6$ 。つまり、 $1 \text{ cm}^2$ の正方形が6個あるから。



$1 \text{ cm}^2$ の正方形が何個あるのか出すためには、縦×横を計算すればいいということだね。

--3個の正方形が2列あるから  $3 \times 2$  で計算できるということだね。これなら弟も納得するな。

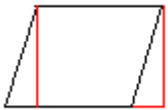
弟の尊敬が勝ち取れたかな。ところが、弟はさらに聞いてきた。長方形は分かったけど、「**平行四辺形の場合**」も同じ様に計算するの？

--えーと。縦×横でいいんじゃないかな。

本当にいいの。この長方形をこうやって平行四辺形につぶしていくと？

--あれ、面積がなくなる。わかった。縦でなく高さだ。

じゃあ、その理由を説明してよ。



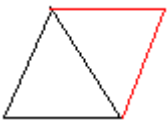
--この三角形の部分を切り取って、こっちに移動させると長方形になり、横は変らないし縦は高さということです。

うまい。すでにわかっている長方形をちゃんと利用している。弟はさらに聞いた。

--しつこい弟だな。

じゃあ、「**三角形の場合**は」どうなっているの。

--底辺×高さ÷2です。



なぜそうなるのか説明できる？

--この三角形をひっくり返してくっつけば、平行四辺形になる。底辺×高さで面積がでて、2倍したから2で割れば三角形の面積がでる。

弟は感心してさらに聞いてきた。「**台形の場合**は」どうやって出すの？

--(上底+下底)×高さ÷2だったかな。

こういう公式になるわけを説明してみて。



--同じように台形をひっくり返して合せると平行四辺形ができます。底辺は上底と下底を合せたもので、2倍したから2で割ります。

いいね。長方形から平行四辺形、そして三角形ときてさらに台形へと、公式(法則)を見つけていったけれど、すでにわかっている事を使えば新しいことも説明できるということもわかったね。ところで、この最後に出てきた台形の公式で長方形の面積を求めることができるだろうか。

--上底と下底が同じだから使える。あっ、それで2で割るのか。

(2) 拡張された公式は前の公式を含む

発問 9-3  
台形の公式を使って三角形の面積を求めることはできるの？

この公式は三角形にもあてはめることができるかな？

--上底がないからだめじゃない。

--そうか！三角形を上底が0の台形と考えれば良い。そのまま公式を使えるよ。

三角形の公式で台形の面積を一度に求めることはできないけれど、台形の公式で三角形の面積は求めることができる。このように発見した公式（法則）は応用範囲も広がっていく。

こういうように考える事を「のぼりおり」といい、私たちの考えは、こうやって深まっていく。

上るばかりじゃいけないよ。台形の公式が全てに当てはめることができるように、降りることもしなければ。

--うちへ帰ったら、妹に教えてやろう。

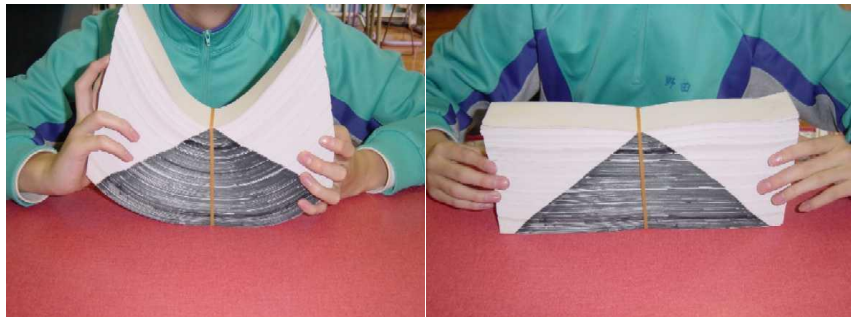
(3) 円の面積はどの公式を使う？

まず、「扇形の場合は？」

画用紙を切って束ね、写真のように扇形を描きます。

この周を直線にすると、扇形は？

--三角形になります。



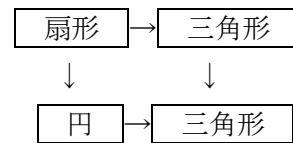
面積は？

--底辺×高さ÷2＝弧の長さ×半径÷2

--扇形って、こんなに簡単に面積を求められるのか。

--そうすると、次は「円の場合は？」だ。

--円は大きな扇形だと考えられるよ。



円も三角形になりますが、ここでは、平行四辺形にしてみます。

--円も平行四辺形になるのですか。

そうです。ここに円を切って並べたものがあります。さあ、どう変わっていくのでしょうか。

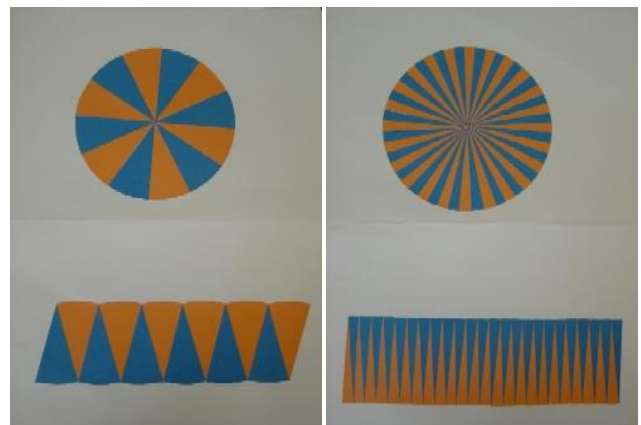
--面白ね。円が長方形になる。最初は平行四辺形だけど、だんだん長方形に近づいていく。

--円→平行四辺形ということは、面積は？

--底辺×高さ。底辺は、円周の半分だ。

--高さは半径。

--つまり、円周×半径÷2。



--あれ？円の面積は半径×半径×3.14と習ったよ。

--えーと、円周は直径×円周率だから、直径×円周率×半径÷2。さらに、直径÷2は半径だから、半径×半径×πだ。

--すごい！

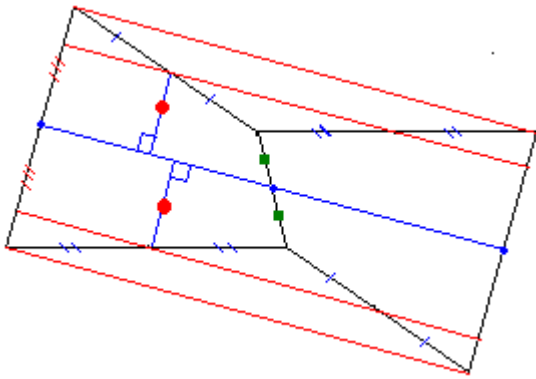
#### (4) 一般の四角形の面積

発問 9-4

一般の四角形の面積の公式はあるの？

--じゃあ、次は「**四角形の場合は？**」ですね。

--四角形も台形のように二つに合わせると対称になるから面積を求められる。



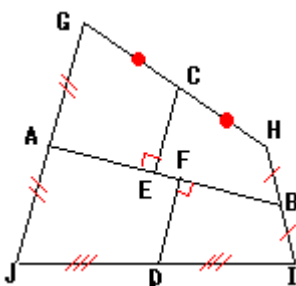
台形の公式もふくむ四角形の面積を求める公式ができそうですね。

--合同な四角形をひっくり返してくっつけると、左の図のようになる。

--平行四辺形みたいだけど、へこんでいる。

--このへこんでいるところをならせないかな。

--横の辺の中点を結ぶと、面積は変わらないよ。



--これで平行四辺形になったから、底辺×高さで求まるよ。

--えっと、底辺を求めるには…。

--縦の辺の中点どうしを結んでも、底辺と平行だよ。

--これなら面積を半分にしなくってもいいね。

--後は高さだ。中点から垂直に中線に下ろせばいい。

--できた。面積 =  $2AB \times (CE + FD) \div 2 = AB \times (CE + FD)$  だ。

--中点連結の定理を使うと、この二本の垂線の長さは同じだよ。

--どうして？

--中点を結んでできる四角形  $ADBC$  は平行四辺形だろ。だから、 $CE = FD$  といえるよ。

--結局、面積は中点を結んだ線で求めることができる。

--**面積 =  $AB \times CE \times 2$**

--あれ、意外に簡単な公式だね。

発問 9-5

この公式は、三角形や長方形や平行四辺形や台形や円にもあてはまるの？

よく出せたね。さて、問題はこの公式が、今までの公式も全て含んでいるのかということなんだ。

--長方形でも台形でも中点を取ると、縦と高さになるから当てはまります。

--三角形でも当てはまるよ。中点連結の定理で半分だから。

--この公式はどんな四角形にでも使えるし、今までの公式を含んでいるんですね。

--台形の公式はちょっと複雑だったけど、この公式は長方形と変わらないよ。

そうなんです。この公式を見ると、この四角形を左図のような長方形に変えることができるということ

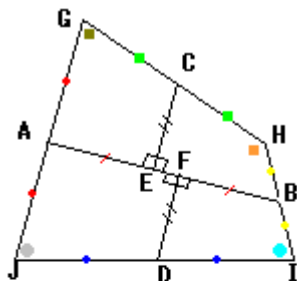
を示している。

--そうか。周りを直角に切って行って、つけたせばできるんじゃないかな。

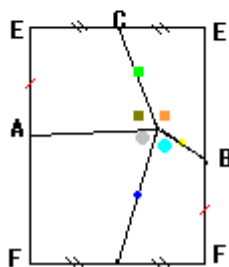
いやいや、そう簡単にはいかないよ。

--そうか、でこぼこができるな。

--さっきは平行四辺形になったもんね。



↓ 裏返すと



実は、この中線や垂線にそって四角形を切って並べ直す（裏返す）と、長方形になるんだ。

--パズルみたいだな。できた、長方形になる。へー不思議だな。

長方形になるから、四角形の面積 =  $AB \times (CE + FD)$ ということが改めて確かめられるね。

--ところで、これ本当に長方形になるの？

そうだね。確かめなくっちゃ。

--真ん中に集まる角は確かに360度になるな。

--四角形にもなる。

--4つの角がそれぞれ90度だから、長方形だよ。

--CEとFDは同じ長さだったから長方形だ。

--それにしても、なんだか不思議だな。

--ところで、さっき先生がこの公式から台形の公式が出てくると言ったけど、本当に出てくるの。

台形の二つの足の中点をとって結ぶと？

--中点連結の定理で上底や下底と平行になる。

--しかも、長さ  $AB = (\text{上底} + \text{下底}) \div 2$  だ。

--そうすると、高さをかけると面積が出る。

--台形の公式 =  $AB \times (CE + FD) = (\text{上底} + \text{下底}) \div 2 \times \text{高さ}$

--長方形や平行四辺形、三角形も、(中点を結んだ長さ)  $\times$  (高さ) で求まるよ。

この公式は、台形の公式を拡張しているんだ。長方形から出発して、平行四辺形、三角形、四角形へと面積の公式を考えてきたけど、拡張した公式はそれまでの公式を含んでいる。つまり、新しい公式は世界を広げているんだ。

--円の場合はどうなるんだろう？ そうか、上底を中心、下底を円周と見なせばいい。

--道路の面積も中心曲線の長さ  $\times$  幅で求めることができる。

--不思議だなあ。どうしてそれまでの公式を含んでいるのだろうか？

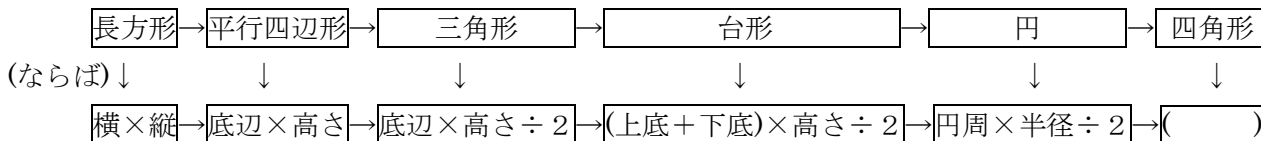
さて、次はどんな発問をすると思う？

--次は「球の表面積の場合は？」ですね。

...

これらの「拡張」と「あてはめ」は、対応図式をどんどん広げていくことにあたります。

(こういう場合は?)



このように対応 (=意味) を与えると、数学が自動的に広がっていくことがわかります。また、公式の変化もよくわかります。そして、拡張は数学の面白さの一つです。

発問 9-6  
なぜ拡張された公式は前の公式を含んでいるの？

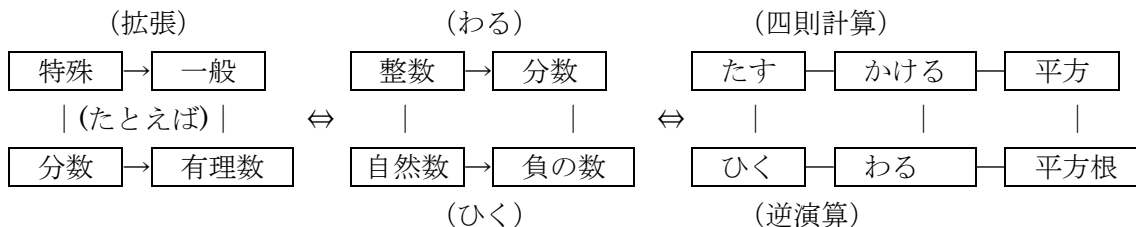


この図を見てください。それぞれの形の概念はこのように広がっています。つまり、具象自体が広がっているのです。この構造があるから、拡張された公式がそれまでの公式を含んでいるのです。

--でも、平行四辺形を拡張すると三角形になるの？

普通は、長方形 ⊂ 平行四辺形 ⊂ 台形 ⊂ 四角形 と広がっていくけど、平行四辺形の一辺を自由に変えたものが台形と考えれば、三角形は上底が 0 の台形、円は中心を上底、下底を円周とした台形と考えることができるから、拡張になっています。だから、これらの対応図式は一通りに表されるというものではありません。拡張の方向は様々にあり、そこに個性が出てくるので面白いのです。  
--なるほど、具体がこういうしくみになっているから、その公式も広がっているのですね。

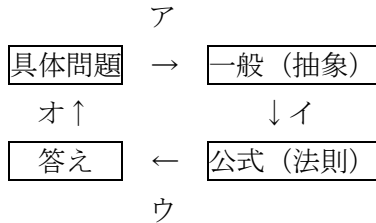
この拡張は、数学のいたるところで現れます。数学の発展は、拡張をすることと言っても良いし、そこに面白さがあります。例えば、図形だけでなく数も拡張されています。  
--整数 → 分数 → 有理数 → 無理数 → 実数 ということかな。



また、公式を考えることは、**特殊** → **一般** の矢印を考えることです。公式はとても便利です。あてはめればすぐに答えが出てくるのですから。**特殊** ← **一般**

発問 9-7  
公式をマスターするためには、公式を使う練習をすればいいの？

まず、公式を使うということはどういうことなのかを図で考えてみましょう。



公式を使うことは、ウとオにあたります。今までやってきたように、アイウという回り道が知恵ということですから、ウはその一部分にしかすぎません。

つまり、ウをいくら練習しても公式を使うことはできません。

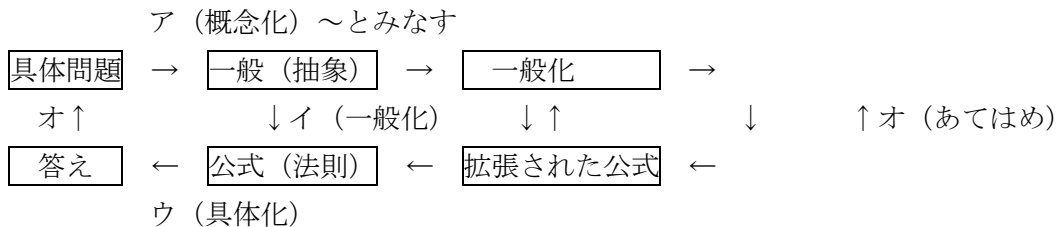
もっと言えば、公式にあてはめて計算することは代入することですからコンピュータで行えますが、その前にその公式を使おうと思いつかないのです。この公式が使えると思いつかなかったらそもそも使うことはできません。

それは、公式をあてはめるという、ウの一方向だけだからです。公式を前提にして、ただあてはめるという練習をしても、なぜその公式が創られたのかという、アやイの方向がなければ、どういうときに使うのか体感できないのです。

例えば、台形の公式を覚えたばかりの人には三角形を求めるために使うという発想は決して出てきません。つまり、公式を使うためには常に「のぼりおり」をすることが大切なのです。

発問 9-8  
「拡張」を今までの、「回り道」や「たとえば」を使って、図式に表せるのですか？

表すことができます。



抽象化や一般化だけが数学でなく、具体化することも必要なことだということを学んできました。

「のぼる」と「おる」は決して切り離すことはできません。

だから、「回り道」なのです。

そして、「たとえば」も「おる」という一方向だけではありません。

ウ→オ→アとたどって、その意味をつかみます。

だから、「回り道」は、具体問題から出発してアイウとたどる「発見 (知恵)」、

「たとえば」は、公式から出発してウオアとたどる「説明」と、見なすことができます。

これを矢印で表して、「回り道」は 「たとえば」は と表します。

上図のように拡張はこの「回り道」が連続していることと考えることができます。

ちなみに、1章以外の全ての章もこの矢印のどちらかで表すことができます。