第８章　方程式を立てる・・・具体化（たとえば）と抽象化（まとめると）

「問う力」を自分のものにすることは、物事を「考える力」を育てます。
私たちは発問を使って授業を進めます。そして、その発問が生徒の問いになったときが、考える力がついたときです。ですから、できるだけ優れた発問をすることを心がけてきました。
教師の間には、昔から優れた発問をする技術として、「対比する発問」が伝えられていました。
対比は物事の有り様をはっきりと浮かび上がらせます。

発問８-１ 方程式と卒業式はどこが同じなのですか？

【ものがたり１６】　方程式と卒業式の関係

式とは何か？
T：卒業式と方程式はどちらも式ですね。では、どこが同じですか。
S：卒業式と方程式は違うものだよ。同じところなんかないよ。
T：でも、同じ「式」だろ。同じところがあるはずだよ。探してみてよ。
S：「式」を辞書で引くと・・・、⑴一定の体裁または形状、きまったやり方、作法、方式。⑵儀式。⑶一定の標準、規定、規則。⑷数学などで関係を表すもの。・・・⑽式神（精霊）の略。
S：わかった。決まったやり方なんだ。卒業式は、やり方や式の順番が決まっている。方程式も、やり方や計算の順番が決まっている。
T：そうだね。やり方というと、アナログ式とかデジタル方式という使い方があるもんね。卒業式は儀式だけれど、卒業のやり方と言ってもいいし、方程式は数量の関係を表すものだけど、未知数を求めるやり方と考えれば、どちらも同じ式なんだね。
S：「式神」とあるけど、陰陽師（おんみょうじ）と関係があるの。
T：いいところに気がついたね。安部晴明（あべのせいめい）って知っている。
S：陰陽師は映画で見たよ。晴明はテレビでもやっていた。その晴明と方程式や卒業式は何か関係があるの。
T：これが大ありなんだな。陰陽道とは陰陽五行説に基づいて、天文、暦、占いなどをあつかう術で、中国から暦が伝わってきたときに、朝廷に陰陽寮ができた。そして、暦博士、天文博士、などを置いた。安部清明はその陰陽寮の博士の一員さ。
S：安部晴明って、博士だったの。陰陽師ではなかったの。
T：当時は博士と陰陽師は同じなのです。
S：暦ってカレンダーでしょ。陰陽師がカレンダーを作っていたんですか。
T：そうです。東洋のカレンダーは、太陰（月）と太陽の動きを合体させて作ったものだから、まさに陰陽道の考えそのものだったのですよ。
S：それで、陰陽師と方程式はどう関係があるの。
T：ここまでくればわかるだろ。陰陽寮の人たちは、方程式を使って暦や天文、時刻のことを調べたんだな。そして、未来のことを予言したんだ。
S：まわりの人は、計算すれば予言できるということを知らないから、びっくりしたんだね。

T：そして、そういった予言＝占いで様々な行事（まつりごと）を執り行っていた。それが卒業式のような儀式なんだな。
S：平安時代って、占いで政治を行っていたのか。

文章題が苦手だったという人は多いと思います。その理由は図式を使うとはっきりします。

		A						
	問題	→	式			具体事象	→	数学的モデル
D	↓		↓	B	⇔	↓		↓
	答え	←	解			解決	←	解
		C						

> 発問８‐２
> ＡＢＣＤのうちでどれが難しいのですか？

ほとんどの人が、Ａと答えるのではないでしょうか。
このＡを「式化」といいます。
Ｂは「計算」で、Ｃは「あてはめ」、Ｄは「確かめ」です。
「式化」は、普通の言葉を数学の言葉に翻訳することです。
数学の言葉は万国共通語ですが、言語ですから使わないと忘れてしまいます。

> 発問８‐３
> Ａ「式化」はどのようにするのでしょう？

これも図式を利用します。
テストや教科書に出てくる文章問題というのは、普通の文章ではありません。
普通の文章を物語とすると、問題の位置はこの図式のようになります。

	(問いかけ)		(問いかけると語りだす)	
教材＝物語	→	文章問題	→	数学的モデル
↓		↓		↓ (計算)
いつ どこで だれが なにを なぜ いかに	抽象化 → ← 具体化	《量》 時間 長さ 重さ 《割合》 速さ	図式化 → ← 具体化	《等式》 方程式 《図》 線分図 面積図

問題文そのものがかなり抽象化されているのです。
ですから、それに慣れる必要があります。
文章問題から数学的モデルへの変換は、まさに英語と同じです。

でも単語帳をもつ必要はありません。
何といっても、日本語ですから難しくはありません。
たいていは、図で表わせば式にすることが容易になります。

発問８-４ 文字は何を指し示しているのですか？

文字は、未知数、定数、変数の３つの働きがあります。
これをモデル化すると、箱になります。
--何でも入るから箱なんですね。

$\boxed{\text{文字}} \rightarrow \boxed{\text{箱}}$

この箱（＝文字）を使って式を立てます。
わからない値や求めたい値を、文字を使って表わします。→未知数
決まった値を、文字を使って表わします。→定数
変化する値を、文字を使って表わします。→変数

【ものがたり１７】　式を立てる

T：ところで、式を作ることを「式を作る」といわないで、「式を立てる」というけど、どうしてだかわかるかい。
S：立てるというのは、「まっすぐにすること」を言うと辞書に書いてあるよ。
S：「柱を立てる」と言うな。
T：とても核心を突いているね。だから、柱を立てて、建物を建てるとなる。
S：つまり、方程式を立てることで問題が解決する。
T：式さえ立てれば、後は計算すれば自動的に答えが出てくるからね。
S：「波を立てる、噂を立てる、風呂を立てる、声を立てる、義理を立てる、役に立てる、腹を立てる、誓いを立てる、使いを立てる・・・」辞書で調べると、「立てる」っていろいろな使い方があるんだな。
T：「式を立てる」というのは、「義理を立てる」に一番近いかな。
S：どうしてですか。
T：義や理は正義とか道理ですから、正義を立てるや道理を立てるは、正しい関係を式にして立ち上げると似ているでしょう。
S：ところで、「式を立てる」簡単な方法ってあるの。
T：あるよ。数学は簡単な方法を探す学問だからね。でもまず問題がなければ、式にする必要がない。
S：ぼくなんか、もともと式にする必要なんか感じてないね。
T：必要があるときというのは、暦とか時間とか天文とか時間や量を調べたり測ったりするときですね。
S：テスト問題で文章題が出た時には、式を立てる必要があるよ。
T：切実な問題ですね。でも、それなら簡単だ。テストの文章題そのものがヒントですよ。
S：まず、わからない数量を文字にして、それから等式関係を見つけるんでしょう。
T：そうです。大切なことは関係を見つけることです。テストの問題は、必ず式が立てられるようにできている特別な問題ですからね。

発問８－５ Ｂ「計算」はどんなことを指し示しているのですか？

文字の式の世界は、単位の計算と同じです。

$2m+3m=5m$　$2m\times 3m=6m^2$　←→　$2x+3x=5x$　$2x\times 3x=6x^2$

$5kg-3kg=2kg$　←→　$5xy-3xy=2xy$

$x+x=2x$　$x-x=0$　$x\times x=x^2$　$x\div x=1$

さらに、等式は「てんびん」にたとえる事ができます。

□□＋３　　　　　□－５

└──┬──┘　　└──┬──┘

　　　└─────────┘

$2x+3 \quad = \quad x-5$

【ものがたり１８】　式を操る

Ｔ：式を自由自在に操ることができなければ、安部晴明のような陰陽師にはなれない。

Ｓ：どうしたら式を操れるの。

Ｔ：数や文字を操って自動的に答えを見つけ出すようにすればいいんだ。

Ｓ：口で言うのは簡単だけど、実際はそんなに簡単じゃないよ。

Ｔ：方程式というのはいわば天びんみたいなもんだ。だから、天びんが釣り合うように式を変形してやればいいのさ。

Ｓ：ところで、「方程」ってどういう意味ですか。

Ｓ：辞書にはこう書いてあるよ。「方程」は、中国漢代の数学書『九章算術』で連立一次方程式を指した。原義は「数量を並べて比べる」の意という。

Ｔ：数量を並べて比べることをいうのか。なるほど。やっぱり天びんだ。

Ｓ：塾で移項というのを習ったよ。

Ｔ：移項の意味を考えてみよう。方程式は天びんだから、いつも右と左がつりあっているかどうかが大切だ。それで、この＝を下にそろえて書く。

てんびんの錘の動き　←→　方程式の移項　←→　道路のセンターライン

$$\begin{array}{r|c|l} x+1 & = & -x+3 \\ x+x & = & 3-1 \\ 2x & = & 2 \\ x & = & 1 \end{array}$$

【ものがたり１９】　センターラインの譬え

Ｔ：これが道路で言うとちょうどセンターラインのようなものだね。

S：そうか、センターラインを越えると、進む向きが逆になるから、＋－が変わるんだ。
S：なるほど。でも、割る時やかける時は変わらないよ。
T：そうだね。でも、×が÷になり、÷が×になるよ。
S：それなら、符号が変わるというよりも、「足す」が「引く」に変わり、「引く」が「足す」に変わると言った方がいいね。
T：とにかく方程式は、式さえ立ててしまえば、後は形式どおりにやると必ず解ける。
S：形式だから式というのか。

ところで、方程式の拡張には二つの方向があります。

$\boxed{x}$ → $\boxed{x,\ y}$ → ⇔ $\boxed{x}$ → $\boxed{x^2}$ →

｜ ｜ ｜ ｜

１元 → ２元 → １次 → ２次 →

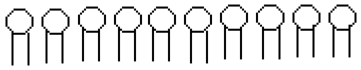
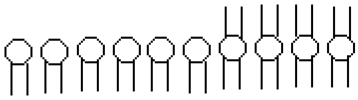
このように、二つの方向の拡張がありますが、次は２元１次方程式を考えます。
これを連立方程式といいます。
ここで「鶴亀算」の問題を連立方程式で解く意味を考えてみましょう。

発問８-６ 鶴亀算の解き方と連立方程式の計算は違うの？

『連立方程式の意味』

【問題】
鶴と亀があわせて１０匹います。
足の数を数えると２８本です。
鶴と亀それぞれ何匹いますか。

鶴亀算	連立方程式
（図） 胴体だけを描くと、 あわせて１０匹 〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇 足の数は２８本。 全部を鶴とすると、足の数は	（式）鶴の数＝χ，亀の数＝ｙ χ＋ ｙ＝１０･･･(1) ２χ＋４ｙ＝２８･･･(2) ２χ＋２ｙ＝２０･･･(1)×２

全部で２０本  足が８本あまるので、２本ずつ分けると、  亀は４匹、鶴は６匹	$2x+4y=28 \cdots (2)$ $-)\ \underline{2x+2y=20 \cdots (1)\times 2}$ $2y=8$ $y=8/2$ $=4$ $x=10-4$ $=6$
・具体的で意味が良くわかる。図を使うというやり方はイメージしやすい。 ・この方法は他の問題でも解くことができ、代入法でも意味づけできる。 ・この方法は簡単には思いつかず、誰にでもできるとは言えないが、「全部を～とする」という思考は一般化できる。	・等式の性質を利用して計算のみで求めようとしている。 ・具体的なイメージが分りにくいが、式そのものを操作しているイメージがある。 ・式にすれば必ず解け、アルゴリズム化しやすい。思考の省エネ。 ・問題を文字式にすることにより一般化でき、どんな問題にも対応できる。

１，鶴亀算と連立方程式の類比

上の「鶴亀算」と「連立方程式」は、まったく同じ方法（同型）です。つまり、連立方程式は鶴亀算の一般化であると同時に、加減法の意味は左のように説明できるということを示しています。

このことは、連立方程式の側から言うと、式に具体的な意味を持たせることができるということであり、鶴亀算の側から言えば、この方法も十分にアルゴリズム化ができるということを示しています。

例えば、

・係数をそろえる＝どちらかの足（もの）にする＝全部を～とする

・引いて文字を一つ消す＝たりない足（もの）の数を求める

・χの係数でわる＝一匹あたりの数でわる

・・・

こう考えると、連立方程式の解法も豊かな意味を持ってきます。

そして、「なぜ係数をそろえるの？」という問いに、

〈連〉文字を消去するため

（鶴）どちらかのものとみなすため

という二つの意味が見えてきます。

しかし、そのような意味を持たせなくても自動的に解けるのが、連立方程式の長所でもあります。

２，鶴亀算と連立方程式の対比

最初は、算数と数学の違いを見つけようとして比べたのですが、比べていくうちに違いがなくなっていることに気がつきました。

これは問題の解き方として、算数的とか数学的とかに分けてはいけないことを示しています。式は具

体物を概念に変えたものであり、具体物を操作するよりも式を操作した方が扱いやすいという人間の認識のあり方に由来するためです。そして、鶴亀算にも、鶴と亀を同じものとみなすという概念化があります。

でも、連立方程式と鶴亀算は文脈が違います。鶴亀算は問題に沿っており、連立方程式は文字に置き換えることから一般化の方向を強く示しています。

とすると、対比すべきは、「私たちが、どちらがわかりやすいか」ということになります。方法としての違いはほとんどないけど、それを受け取る私たちの側が大きな違いを感じてしまうということです。

たぶん子どもたちの理解も二つに分かれると思います。イメージ化（意味）を求める子と、言語化（操作）を求める子とに。

３，まとめ

代数は概念化する働きを持っています。この「**概念化**」に対して、具体的な意味を問うていく方向を「**具体化**」と名づけます。

→（概念化）
現実の具体的なモノコト ←→ 概念
（具体化）←

すると、鶴亀算と連立方程式は、「算数的解き方」と「代数的解き方」の対比というよりは、「概念化」と「具体化」の対比ととらえた方がはっきりします。
そのことを、図式（ダイアグラム）で説明してみます。

概念化
具体的な問題 → 式
↓ ↓
答え ← 解
具体化

方程式は、具体的な問題を式に変換して、計算して解を求め、それを問題に当てはめて確かめます。だから、式から解が求まった時、具体的な問題に当てはめて確かめるという「具体化」が必要でした。

しかし、鶴亀算と連立方程式の同型対応は、この式の計算にも具体的な操作が対応していることを示しています。だからこそ、安心して連立方程式を計算できるのです。

概念化
具体的な問題 → 式
↓ ↓
具体物の操作 ←→ 操作（計算）…実は対応している！
↓ ↓
答え ← 解
具体化

数学では常に概念化（＝抽象化，一般化）を行っています。でも、その概念（記号・イメージ）は現実の何に対応するのかということ（＝具体化，意味化）はあまりやりません。
連立方程式の応用問題は、概念化のトレーニングでもありますが、これらの概念を生活にあてはめるという具体化のトレーニングでもあるのです。

図も一種の概念であるから次のように対応させると、このダイアグラムはさらなる概念化を求めて、右に限りなく広がっていきます。

具体的な問題	→	箱	→	式	→
↓		↓		↓	
具体物の操作	←	操作	→	計算	→
↓		↓		↓	
答え	←	答	→	解	→

それは数学の発達としてもとらえることができます。例えば、具体物→図化→シェーマ化→式化→…と続く発達であると。
その時、注意しなければならないことがあります。それは、常に具体化を伴わないと正しい概念化なのかわからなくなったり、イメージすることも難しくなってくるということです。
「矢印は常に両方向に向いている」ということを忘れてはいけないのです。