

第5章 ターレスの証明の発見・・・説明における「説得のモード」と「納得のモード」

発見とは新しいことを指し示すこと、つまり、それまで問われなかったことを「問う」ことです。

このことは、数学における創造的な面も、問いから始まり、問いによって発見されることを指し示しています。このことを説明するために、数学の始祖といわれるギリシャのターレスのことを紹介します。まず、ターレスの物語を聞いてください。

【ものがたり6】 証明と民主主義

『ターレスは、証明という面倒な事を何故始めたのか』



ターレスって知ってる？

--知らない。

--その絵の怒っている人のこと？

「イソップ物語」という童話を読んだことあるだろう。古代ギリシャの残した偉大な遺産の一つなんだけど、その中の話の一つにターレスのことだという話がある。聞きたいかい。

--うん。

今から二千五百年前、当時ギリシャはまだ文明は発達していなかった。商人だったターレスは、文明の進んだ国エジプトと交易をやっていた。そして、エジプトに行った時は進んだ文化を勉強した。ある時、ロバに塩を運ばせていた。当時、塩は貴重な商品だった。塩のことをサルトというけど、そこからサラリーという言葉が生れたくらいさ。

ロバはその塩を何袋も背に乗せて、よたよたと川まで来た。なんのはずみかロバは、足を滑らせ、川の真ん中で転んでしまった。溺れまいとあわてて立ち上がったロバは、はたと気が付いた。なんと荷が軽くなっているではないか。それ以来、川を渡る時には必ずひっくりかえるようになったとき。なぜかわかる。

--転べば楽できるから、条件反射になったんじゃないかな。

ターレスは困った。何とかしなければならぬ。そこで、ある計画を思いついた。何を考えたか解るかい。彼は、塩の代りにあるものを積んだのだ。

--綿でしょ。

そう、良くわかったね。川へ来ると、ロバは楽になろうといつもの様に転んだわけだ。ところが今度は軽くない。それどころか、かえって重くなっている。それ以来、ロバはもう転ばなくなったという話だ。

--なんか聞いた事あるな。

ターレスは、日食を予言したりして当時の人を驚かしている。当時の人は、自然界におきる事は神様がやった事、全ての物は神様が作った物、と考えていた。ところが、この人は万物の元になる物が、水であるということを、始めて言った人なんだ。

--そんなのおかしいよ。元素は、水だけじゃないよ。

(万物は水からできている) 図→



水は雲となり、雨となって植物を育てる。その植物を動物は食べている。血は、水から出来ている。その水は、川となって流れ、海へそそぐ。その海の中で魚が育つ。その魚を、人は食べる。だから人も水から出来ているといっても良い。

--鉄だってある。

その通り。だから、後の人は、火、木、金、土、とつけたしてこれが万物の元だと説明したわけだ。

--それに月と日をつけたせば曜日になるよ。

良く考えたねえ。曜日だってちゃんと意味があるんだな。ところで、ターレスのえらいのは、それまで神様で説明していたのを、自然をよく見て、そこから元の物を探っていく事により、いろいろな現象を説明していこうとした所にある。これが理科で勉強する原子論の基で、科学の始まりさ。だから、ターレスは、数学の神様と呼ばれている。

彼はエジプトから学んだわけだが、単に真似しただけではない。彼が新しく始めたものに数学の証明がある。

--ターレスのおかげで、僕たちは苦しんでいるのか。

この証明は、ギリシャでしか生れていない。数学は、文明の発達と共に生れたから、世界中にあるが、証明はギリシャにしかない。

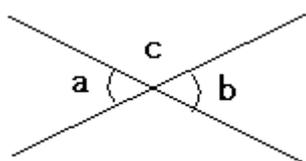
--他の国には数学がなかったの？

いや、どんな国にも数学はあった。けども証明はギリシャ人の発明なのさ。たとえば、中国の数学を見てみよう。ここに昔の中国の数学の本がある。内容を見ると、まず問題が書いてある。そして、次にやり方と答が書いてある。そして、それだけ。また、問題→やり方→答と続いていく。ここには、何故そうなるのかの説明は書かれていない。

--では、ギリシャ人たちはどういう証明をしたの？

発問 5-1 ターレスの証明の方法とは？

例えば、ターレスは対頂角が等しいことを次のように証明した。



- (1) a と b が等しいことを説明する。
- (2) そのために第三項 c を考える。
- (3) $a + c = 180^\circ$ (直線は 180°)
 $b + c = 180^\circ$

- (4) $a + c = 180^\circ = b + c$ (同じものは等しい)
- (5) $a + c - c = b + c - c$ (等しいものから同じものを引いても等しい)
- (6) よって、 $a = b$

対頂角が等しいということを説明するために、もっと根本的な原理 (等しいものから同じものを引いても等しい) を使っている。この証明の素晴らしいところは、 $a = b$ という現象がより根本的な原理から説明できるという所にある。現象をできるだけ少ない原理から説明しようというアイデアなんだ。つまりギリシャ人は「なぜ？」を徹底的に追求したんですね。

そして、その突き詰めた原理から説明するのが証明。だから、証明は説明。この証明のおかげで数学は発展し、そして他の学問にも影響を与えていく。後からこの証明を見た人が、考え方を理解し、さらに発展させることができたからですね。

『証明と民主主義』

発問 5・2 なぜギリシャで証明が生まれたの？

ところで、ターレスが何故証明を始めたのか考えてみよう。理由の一つは、さっき説明した物事の元になる物をあくまで追求する心があったこと。物事にはちゃんと理由があるということですね。

二つ目は、民主主義だ。エジプトには、帝王がいて、押しつけ押えつけの国。それに対して、ギリシャは、民主主義の国。エジプトは一人の帝王が命令し、他の者はそれに従うだけ。だから、もめない。ところが、ギリシャはみんなが王様みたいなものだからワイワイガヤガヤ。つまり、まとまらない。



どちらの国が強いか、これははっきりとは言えない。でも、マラトンの戦いというギリシャとペルシアの戦いがある。専制王国だったペルシアがギリシャに攻めてきたのだが、見事これを撃退した。戦いの結果はどうなったのか心配しているアテネの市民のもとまで、その勝利の知らせを持って、40数キロを走り、「勝ったぞ！」と叫んでバタリと倒れた兵士を記念して古代オリンピックの種目になったのが、後のマラソンの基となる。マラソンというのは地名なのか。

彼等は、自分たちの国を守るために必死で戦ったのだ。誰かから命令されたからではなく、自分が主人公であるから自分で自分の国を守ろうとしたわけだ。命令されて、王様のために戦うのとはまったく意気込みが違う。

そして、この古代ギリシャから科学の芽が生れたのだ。科学は民主主義の基でしか育たない。なぜな

ら、民主主義はややこしいもので、みんなが違った事を言っていたらまとまらないから、相手を説得して意見をまとめなければならない。また、誰の言っている事が一番正しいのかを知らなければならない。それは、まさに証明なのだ。

--民主主義は証明をしないとまとまらないわけか。

説得と納得が証明を生み出したといってもよい。どんな、場合でも、何時でも、何処でも、誰でも、その事が正しいといえるために証明を使う。ターレスは、数学では見たところ同じらしいというだけではいけない、絶対に確かな証拠がなければいけないと考え、証明することを始めたのだ。

これは、納得するための証明とも言える。そして、説得のための証明とも言える。

--説得されるのは何だかいやな気がする。上から目線だよ。

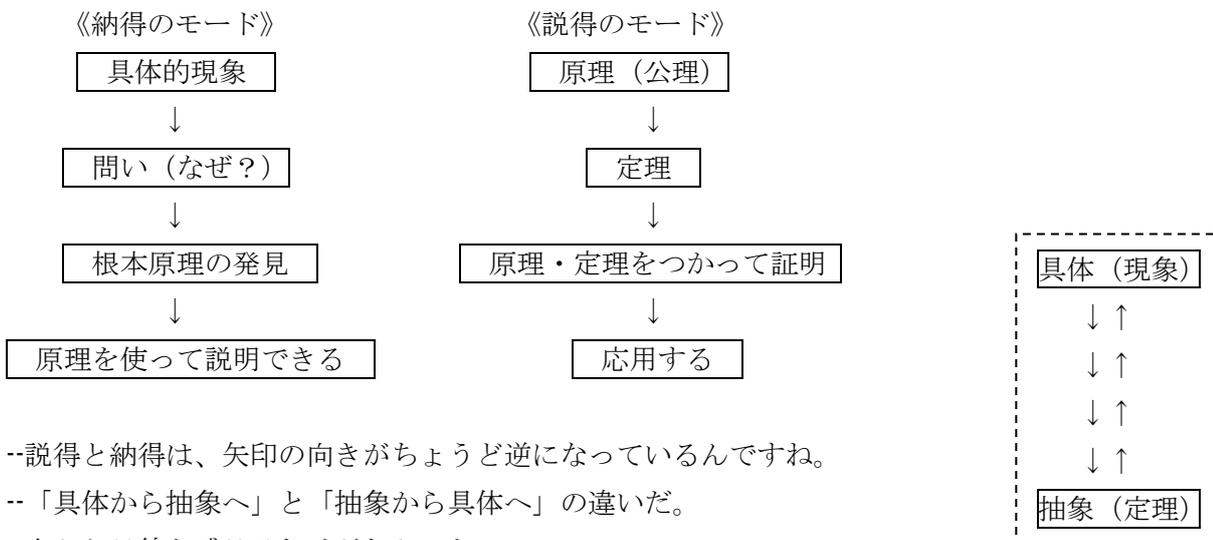
--証明は難しいけど、証明すると私自身がしっかりわかるのでいいなと思う。

だから、証明=説明と考えても間違いではない。

--自分が納得する時にも使うから、証明=解り方（納得）と言ってもいいな。

発問5-3 説得（のモード）と納得（のモード）の違いは何ですか？

この違いは、図式化するとよくわかります。



--説得と納得は、矢印の向きがちょうど逆になっているんですね。

--「具体から抽象へ」と「抽象から具体へ」の違いだ。

--上から目線と感じるわけがわかった。

私たちが理解する時は、納得のモードをたどります。ところが、誰かを説得する時には、この逆をたどることが多いのです。

そもそも、ユークリッド原論は、「公理→定理→証明→定理→証明→・・・」という典型的な説得のモードを取っています。でも、ユークリッドたちは、原論を書くときに、「具体的現象→なぜ？→原理の発見→原理を使って説明→・・・」という納得のモードを使ったはずなのです。

ということは、私たちが納得するためには、教科書とは逆の道をたどっていけばよいということがわかります。つい説得のモードになってしまう授業も、納得のモードに組み替えていかなければなりません。

さて、次はターレスの発見の物語です。

【ものがたり 7】 ターレスの測量

エジプトでピラミッドを見たターレスは、その美しさに感動し、なんとか高さを測量したいと思いました。でも、直接ピラミッドの高さを測るわけにはいきません。

何と云っても、ピラミッドは石でできている四角錐ですから直接高さを計ることはできません。

また、当時は表面がつるつるで、頂上に登ることができませんでした。そんなピラミッドの高さをターレスはどうやって求めたのでしょうか？



ターレスは直接ピラミッドの高さを求めたわけではありませんでした。ということは、ピラミッドの高さを別のものにおきかえたということです。

発問 5-4

ターレスは、何におきかえたのでしょうか？

たぶん彼は夕日に照らされるピラミッドの影を見て気がついたと思われます。

その影は巨大でした。

でも、地面にありますから測ることができます。

そう思ったターレスは、ふと気がついたのです。

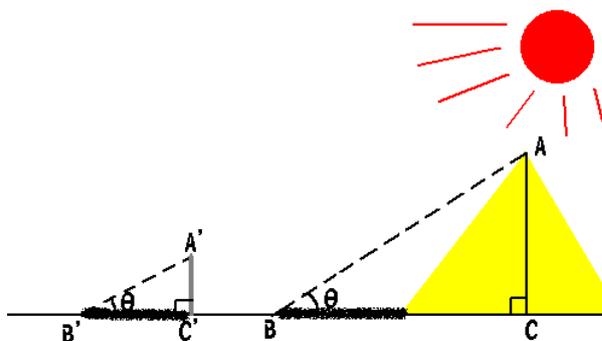
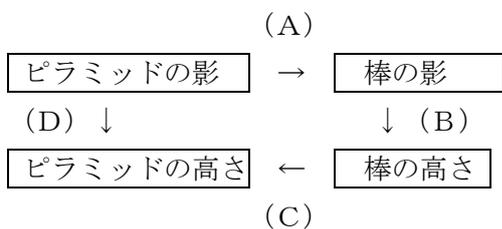
彼は棒を立てて、棒の影の長さを測ったのです。

棒の高さは測ることができます。

棒の影と高さがわかりました。

ピラミッドの影の長さもわかっています。

ターレスの発見は次のように図式で分析できます。



発問 5-5

ターレスの発見はどこにあるのでしょうか？

それは、Aの対応を見つけたことにあります。 (A'C' = 1 m, B'C' = 1 m 2 0 cm, BC = 1 8 0 m)

「もしかしてピラミッドの影と棒の影は対応しているのでは」とひらめいたのです。

このAの対応を、発見といいます。
それはCの対応についても同じようにいえます。

発問5-6

ところで、Cが対応していることはどこからわかりますか？

ピラミッドと棒は大きさも形もまったく違います。
ところが、この二つのモノに共通するコトがあるのです。
それは三角形です。ピラミッドの影と高さの作る直角三角形と棒の影と棒の高さの作る直角三角形です。
この二つの三角形の形が同じなのです。
それは、太陽の光が平行であることから言えます。

これが相似です。 . . . $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

相似は長さが比例しています。 . . . $A'C' : B'C' = AC : BC$

$$1 : 1.2 = x : 180$$

$$x = 180 \div 1.2$$

$$= 150$$

この図式は発見の方法をも指し示しています。

つまり、 $D = A + B + C$ という等式が成り立つことの指し示しが発見だということです。

そして、この「回り道」こそが、人間の知恵であることを見事に指し示しています。

発見はこの対応図式そのものを見つけ出し、指し示すことであると言えます。

この様な対応の発見は、矢印による指し示しであり、この指し示しは「問い」によって私たちの意識の上に現われてきます。そして、この場合の証明は指し示しの正当性の説明となります。

まとめ

ターレスの発見は、「指し示す」ことの大事さを「指し示し」ており、
「問い」は私たちをより高い次元（発見）へと引き上げてくれます。
だから、「問い」を持つことが、理解し、納得できる第一歩なのです。